SVAR TILL TENTAMEN

**Algebra 1**

2007-12-21

1. Det är lätt att se att påståendet gäller för $n = 1$, både vänsterledet och högerledet blir ju $1/2$ i detta fall. Vi antar nu att formeln gäller för ett visst tal $n$ dvs.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!} \quad (IA).$$

Med användning av denna formel vill vi nu visa att motsvarande formel gäller när vi går ett steg till, dvs. vi vill visa att

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{((n+1)+1)!} \quad (IP).$$

Som vanligt vid denna typ av problem skriver vi om vänsterledet i (IP) så att vi får dels vänsterledet i (IA) dels en extra term. Sedan använder vi (IA) för att skriva om det hela som högerledet i (IA) samt den extra termen.

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} + \frac{n+1}{((n+1)+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!} + \frac{n+1}{((n+1)+1)!}.$$

Slutligen skriver vi om detta så att man ser att vi verkligen har högerledet i (IP).

$$1 - \frac{1}{(n+1)!} + \frac{n+1}{(n+1)+1)!} = 1 - \frac{n+2}{(n+2)!} + \frac{n+1}{(n+2)!} = 1 - \frac{(n+2)-(n+1)}{(n+2)!} = 1 - \frac{1}{(n+2)!}.$$

Vi har då visat att induktionssteget gäller och resultatet följer nu via induktionsaxiomet.

2. Lösningen är $m = 8$.

3. Resten blir 5.

5. Lösningarna ges av

$$\begin{cases} x = -458 + n \cdot 1005 \\ y = 211 - n \cdot 463, \end{cases}$$

där $n$ är ett godtyckligt heltal.

6. Den största gemensammma delaren är $x^2 + 4$ och ekvationerna har rötterna $x = \pm 2i$ (dubbelrötter) resp. $x = \pm 2i, x = 8$.

7. b) Relationen är reflexiv och symmetrisk men ej transitiv. Man ser att $3R6$ och $6R2$ gäller men inte $3R2$.

8. Rötterna är $\pm i, 2 \pm i$.

*Gunnar*