UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Inger Sigstam, tel: 471 3223

Tentamen i matematik
ALGEBRA 1
2009-05-29

Skrivtid: 8-13. Inga hjälpmedel tillåtna. Lösningarna skall åtföljas av förklarande text. Varje uppgift ger högst 5 poäng. För betygen 3 (4) (5) krävs minst 18 (25) (32) poäng, inklusive ev bonuspoäng.

1. (a) Avgör om någon eller båda av följande formler är tautologi genom att sätta upp sanningsvärdestabeller för dem.

$$(\neg(p \wedge \neg q) \wedge q) \longrightarrow p \qquad\qquad \neg(p \wedge q) \longleftrightarrow (\neg p \vee \neg q).$$

   (b) Låt A och B vara mängder i ett universum U. Visa att $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.
   (Om X är en mängd i U, så betecknar X^c komplementet till X med avseende på U.)

2. Konstruera fyra funktioner f_1, f_2, f_3 och f_4 från $\mathbf{N}$ till $\mathbf{N}$ med följande egenskaper:
   (i) $f_1 : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ är bijektiv;
   (ii) $f_2 : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ är injektiv men inte surjektiv;
   (iii) $f_3 : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ är surjektiv men inte injektiv;
   (iv) $f_4 : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ är varken surjektiv eller injektiv.

3. Visa med induktion att $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ är delbar med 7 för alla naturliga tal n.

4. Visa att om heltalet n inte är delbart med 3, så är talet $n^4 + n^2 + 1$ delbart med 3.

5. Bestäm sista siffran då talet 23^{812} skrivs i basen 7.

6. På mängden av par av positiva heltal, $\mathbf{Z}_+ \times \mathbf{Z}_+$, definierar vi en relation S genom

$$(a, b)S(c, d) \iff ad = bc.$$

   Visa att S är en ekvivalensrelation på $\mathbf{Z}_+ \times \mathbf{Z}_+$.
   Ekvivalensklassen som innehåller paret (a, b) betecknas $[(a, b)]$.
   Räkna upp tre par förutom (3, 4) som tillhör ekvivalensklassen $[(3, 4)]$. Visa sedan att $[(3, 4)]$ är uppräkneligt oändlig genom att ange en bijektion $f : \mathbf{N} \longrightarrow [(3, 4)]$.

7. Ekvationen $z^4 + 12z^3 + 56z^2 + 120z + 100 = 0$ har minst en multipelrot. Lös ekvationen fullständigt.

8. Polynomet $f(z) = z^3 - \frac{2}{3}z^2 + az - 2$ har reella koefficienter. Minst ett nollställe till f ligger på imaginära axeln. Lös ekvationen $f(z) = 0$. Vad är a?

LYCKA TILL !

Korta svar till Algebra 1, 20090529:

1. (a) Den första formeln är inte tautologi eftersom den är falsk om p är falsk och q är sann. Den andra formeln är tautologi.
   (b) Rita t ex Venndiagram för de båda mängderna. Eller visa att för ett godtyckligt element $x \in U$ gäller $x \in (A \cap B)^c \iff x \in A^c \cup B^c$. Man kan då ha användning av tautologin i uppgift (a).

2. T ex: $f_1(n) = n$; $f_2(n) = n + 2$; $f_3(n) = n - 1$ om $n > 0$, $f_3(0) = 0$; $f_4(n) = 10$. Egenskaperna måste visas gälla.

3. $A(n) = 2^{n+2} + 3^{2n+1}$. Bas: $7|A(0)$ eftersom $A(0) = 7$.
   I.A: $7|A(p)$ för ett viss heltal $p \geq 0$. Alltså finns heltal K så att $A(p) = 7K$.
   Ind.Steg: $A(p + 1) = 2 \cdot 2^{p+2} + 9 \cdot 3^{2p+1} = 2\left(2^{p+2} + 3^{2p+1}\right) + 7 \cdot 3^{2p+1} = [enl.I.A.] = 2 \cdot 7K + 7 \cdot 3^{2p+1} = 7\left(2K + 3^{2p+1}\right)$. Alltså $7|A(p + 1)$. Enligt induktionsaxiomet följer nu att $7|A(n)$ för alla naturliga tal n. VSB

4. Falluppdela efter vad n är kongruent med modulo 3.

5. Ett tal X i basen 7: $X = a_n7^n + \cdots + a_27^2 + a_17 + a_0$, där $a_0, \ldots, a_n \in \{0, 1, \ldots, 6\}$. Man ser att $X - a_0$ är delbar med 7, och alltså är sista siffran det tal mellan 0 och 6 som X är kongruent med modulo 7.
   Vi får nu (modulo 7): $23^{812} \equiv 2^{812} = 2^{3\cdot 270+2} = (2^3)^{270} \cdot 2^2 \equiv 1^{270} \cdot 4 = 4$.
   Svar: Sista siffran är 4.

6. S är reflexiv, dvs $(a, b)S(a, b)$ eftersom $ab = ba$ för alla pos heltal. S är symmetrisk, ty $(a, b)S(c, d)$ innebär $ad = bc$, och $(c, d)S(a, b)$ innebär $cb = da$. Den ena medför den andra eftersom multiplikation är kommutativ. För att visa S transitiv, anta att $(a, b)S(c, d)$ och $(c, d)S(e, f)$. Då gäller $ad = bc$ och $cf = de$. Vill visa att $(a, b)S(e, f)$, dvs att $af = be$. Vi får $ad \cdot cf = bc \cdot de$, förkorta med cd (som inte är 0 eftersom vi sysslar med positiva heltal) och få $af = be$. Alltså är S en ekvivalensrelation.
   Vi har $(a, b)S(3, 4)$ omm $4a = 3b$. Eftersom 3 primtal och inte delare i 4, så måste $3|a$, dvs $a = 3k$ för något heltal k. Då blir $3b = 4 \cdot 3k$, som medför att $b = 4k$. Alltså, om $(a, b) \in [(3, 4)]$ så är $(a, b) = (3k, 4k)$ för något heltal $k > 0$. Det följer att $[(3, 4)] = \{(3k, 4k) : k \geq 1, k \in \mathbf{N}\}$.
   Så $f : \mathbf{N} \longrightarrow [(3, 4)]$ kan t ex definieras: $f(n) = (3(n + 1), 4(n + 1))$.

7. Använd Euklides algoritm för att finna en SGD till $f(z)$ och $f'(z)$. Multipelrötter måste vara nollställen till SGD.
   Alternativt: Sök först nollställena till $f'(z)$, och pröva dessa i $f(z)$. (Ett multipelnollställe till $f(z)$ måste vara ett nollställe till $f'(z)$.) En SGD till $f(z)$ och $f'(z)$ är $r(z) = z^2+6z+10$. Genom att läsa baklänges i Euklides algoritm ser man att $f(z) = r(z)^2$.
   SVAR: Det finns två dubbelrötter: $-3 \pm i$.

8. Ett nollställe till $f(z)$ är $z = bi$ på im-axeln (där alltså $b \in \mathbf{R}$). Eftersom polynomets alla koefficienter är reella är även $-bi$ en rot, och det tredje nollstället är reellt, säg c. Nollställenas summa är $\frac{2}{3}$, vilket ger $bi - bi + c = \frac{2}{3}$, så $c = \frac{2}{3}$. Rötternas produkt är 2, vilket ger $-b^2i^2\frac{2}{3} = 2$, så $b^2 = 3$. Nu kan $f(z)$ faktoriseras $f(z) = (z - bi)(z + bi)(z - \frac{2}{3}) = (z^2 + 3)(z - \frac{2}{3})$, varur vi får $a = 3$.
   Svar: Ekvationens rötter: $\frac{2}{3}$, $\pm\sqrt{3}\,i$. Koefficienten för z är $a = 3$.