UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Seidon Alsaody

Prov i matematik
Facit
Algebra I
18/12–2009

1. **a)** T ex $\mathbf{R}$ eller $\mathbf{C}$.
b) Eftersom polynomet har heltalskoefficienter måste eventuella rationella delares nämnare dela högstagradskoefficienten, men 4 delar inte 2.
c) $(x-a)|f(x) \leftrightarrow f(a)=0$ där $f(x)$ är ett polynom.
d) Relationerna $\geq$ och $\leq$ är två exempel.
e)

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
S	F	F
F	S	F

det vill säga att $p \wedge \neg p$ alltid är falskt.

2. Basfall $n=1$: $3|(4-1)$.
IA: Antag, för något $p \geq 1$ att $3|(4^p-1)$ dvs att $4^p-1=3k$ för något heltal k, dvs att $4^p=3k+1$.
Ind.steg: Visa att $3|(4^{p+1}-1)$ dvs att $4^{p+1}-1=3l$ för något heltal l.
Detta visas genom att man ersätter 4^{p+1} med $4 \cdot 4^p$ och använder IA.

3. **a)** Vi får $40x+28y=94$, men $\mathrm{SGD}(40,28)=4$ delar inte 94, så lösningar saknas. Alternativ: $4|40$ och $4|28$ medför enligt delbarhetsregler att $4|(40x+28y)$ för alla heltal x,y, vilket inte stämmer här.
b) Den enda möjligheten är att en person hade fått 40 och 2 personer hade fått 28, eftersom vi inte kan ha ett negativt antal personer. (Det var alltså fråga om tre vänner totalt.)

4. $(138)_9=(1110100)_2$

5. Beviset bygger på samma princip som beviset för att $\sqrt{2}$ är irrationellt — se kursboken.

6. **a)** $f(x_1)=f(x_2) \leftrightarrow \dfrac{1}{x_1}+2=\dfrac{1}{x_2}+2=\dfrac{1}{x_1}=\dfrac{1}{x_2} \leftrightarrow x_2=x_1$ vilket visar injektivitet.
b) $x=1$ är ett motexempel: $\dfrac{1}{x}+2>2$ för alla positiva reella x, så funktionen antar till exempel aldrig värdet ett.

7. De sökta rötterna är $x=-1\pm i$ och $x=\dfrac{-5\pm i\sqrt{3}}{2}$.

8. Nollställena är $x=\pm i\sqrt{3}$ och $x=1\pm i\sqrt{7}$.