UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Hanna Härdin

Prov i matematik
Lärare, fristående kurs
Algebra I, kurskod 1MA004
2012-01-13

Skrivtid: 8.00 - 13.00. Hjälpmedel: enbart penna och sudd, inget annat tillåtet. Varje uppgift ger högst 5 poäng. För betygen 3, 4 och 5 krävs minst 18, 25 respektive 32 poäng. ***För full poäng krävs att du noggrannt motiverar varje steg i dina resonemang!*** *Lycka till!*

1. (a) Finn samtliga lösningar till ekvationen

$$\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{x-1}=0.$$

(b) Låt $A=[-1,0)$, $B=[0,3]$, $C=(-1,2)$ och $D=[1,3]$. Vilka av följande påståenden är sanna?

$$(i)\ \ 0\in A\cap B \qquad (ii)\ \ C\subset A\cup B \qquad (iii)\ \ A\subset C \qquad (iv)\ \ \{-1,1\}\subset A\cup D$$

Motivera dina svar!

2. (a) Skriv talet $(562)_{tio}$ med basen sju.
(b) Beräkna resten då 3^{572} delas med 10.

3. Finn samtliga heltalslösningar till ekvationen $7x\equiv 13 \pmod{576}$.
Ledning: Ställ upp en diofantisk ekvation!

4. En relation R på mängden $\mathbb{R}$ definieras av att $mRn \Leftrightarrow |m|=|n|$. Visa att R är en ekvivalensrelation och beskriv samtliga ekvivalensklasser.

5. Visa att mängderna $A=\{3k : k\in\mathbb{Z}\}$ och $\mathbb{Q}$ har samma kardinalitet.

6. Visa att $3^n>2^n+2n$ då n är ett heltal större än eller lika med två.

7. Ekvationerna $3x^4-x^3+6x^2+23x+5=0$ och $x^4-4x^3+2x^2+4x-35=0$ har en gemensam rot. Lös den första ekvationen fullständigt.

8. För vilka värden på de reella konstanterna a och b är funktionen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ som definieras av

$$f(x)=ax^3+bx$$

(a) injektiv? (b) surjektiv? (c) bijektiv?