① (2012-01-13)

Går även att lösa genom att observera att vi måste ha
$\sqrt{x^2+x-2} = 0$
OCH
$\sqrt{x-1} = 0$
ty kvadratrötter är alltid ≥ 0

(a) Lös $\sqrt{x^2+x-2} + \sqrt{x-1} = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+x-2} = -\sqrt{x-1}$

$\Rightarrow x^2+x-2 = x-1$

$\Leftrightarrow x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

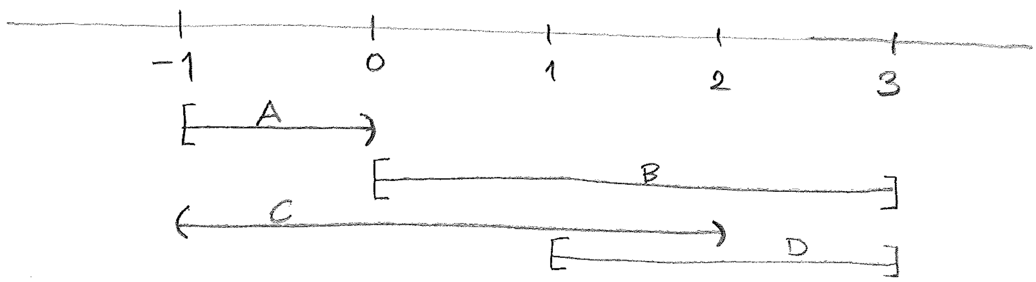
Eftersom implikation gäller bara framlänges vet vi bara att om ekvationen har lösning(ar) måste de vara antingen +1, −1 eller båda. Måste därför testa lösningarna:

$+1: \quad VL = \sqrt{1+1-2} + \sqrt{1-1} = 0 = HL$

$-1: \quad VL = \sqrt{1-1-2} + \sqrt{-1-1} = \sqrt{-2} + \sqrt{-2} = 2\sqrt{2}\,i \neq 0 = HL$

Så enbart +1 är en lösning till ekvationen.

(b)



(i) $A \cap B = \phi$ så $0 \notin A \cap B$. (Påståendet falskt.)

(ii) $A \cup B = [-1, 3]$ så $C \subset A \cup B$ (Påståendet sant)

(iii) $A \not\subset C$ ty $-1 \in A$ men $-1 \notin C$ (Påståendet falskt)

(iv) $\{-1, 1\} \subset A \cup D$ (Påståendet sant.)

(obs: ej intervall utan en mängd med 2 element)

(2) (2012-01-13)

(a) $7^0 = 1, \quad 7^1 = 7, \quad 7^2 = 49, \quad 7^3 = 343$

(Divisionsalgoritmen ger)

$562 = 1 \cdot 343 + 219$

$219 = 4 \cdot 49 + 23$

$23 = 3 \cdot 7 + 2$

$\Rightarrow 562 = 1 \cdot 343 + 4 \cdot 49 + 3 \cdot 7 + 2 \cdot 1 =$

$= 1 \cdot 7^3 + 4 \cdot 7^2 + 3 \cdot 7^1 + 2 \cdot 7^0 = (1432)_{sju}$

(b) $3^{572} = (3 \cdot 3)^{286} = 9^{286} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Sats } 3.11(c)}}{\equiv} (-1)^{286} \pmod{10} = 1$

Resten blir 1.

(3)

$7x \equiv 13 \pmod{576} \iff 7x - 13$ är delbart med 576

$\iff 7x - 13 = 576y$ där $y \in \mathbb{Z}$

$\iff 7x - 576y = 13$

$SGD(7, 576) = 1$ (ty $7 \nmid 576$: och 7 är ett primtal

$$\begin{array}{r} 82 \\ 576 \,\boxed{7} \\ -56 \\ \hline 16 \\ -14 \\ \hline 2 \end{array}$$

)

($\Rightarrow$ Kan inte dra slutsatsen att ekvationen är olösbar)

$576 = 82 \cdot 7 + 2$

$7 = 3 \cdot 2 + 1$

$2 = 2 \cdot 1 + 0$

$\Rightarrow 1 = 7 - 3 \cdot 2 = 7 - 3 \cdot (576 - 82 \cdot 7) = +247 \cdot 7 - 3 \cdot 576$

$\Rightarrow 1 = 247 \cdot 7 - 3 \cdot 576$

$\iff 13 = 13 \cdot 247 \cdot 7 + 13 \cdot 3 \cdot (-576) = 3211 \cdot 7 + \underbrace{39}_{y} \cdot (-576)$

Allmän lösning:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 3211 + 576n \\ y &= 39 + 7n \end{aligned}}$$

Test: $n = 0 \Rightarrow 7x - 576y = 22477 - 22464 = 13$ OK

$n = 1 \Rightarrow 7x - 576y = 7 \cdot 3787 - 576 \cdot 46 = 26509 - 26496 = 13$

(4) $mRn \Leftrightarrow |m| = |n| \qquad m, n \in \mathbb{R}$

Reflexiv? Ja:

$aRa \Leftrightarrow |a| = |a|$ Stämmer

Symmetrisk? Undersök om $aRb \Rightarrow bRa$:

$aRb \Leftrightarrow |a| = |b| \Leftrightarrow |b| = |a| \Leftrightarrow bRa$; ja, symmetrisk!

Transitiv? Undersök om $aRb,\ bRc \Rightarrow aRc$

$aRb \wedge bRc \Leftrightarrow |a| = |b| \wedge |b| = |c| \Leftrightarrow |a| = |b| = |c|$

$\Rightarrow |a| = |c| \Leftrightarrow aRc$; ja, transitiv

R är en ekvivalensrelation ty den uppfyller ovanstående 3 villkor.

Ekvivalensklasser

Def. ekv. klass A_x för $x \in \mathbb{R}$: $A_x = \{y \in \mathbb{R} : xRy\}$

I detta fall har vi

$A_x = \{y \in \mathbb{R} : |x| = |y|\} = \{x, -x\}$

Fallet då $x \neq 0$: Det finns 2 tal $y \in \mathbb{R}$ sådana att $|x| = |y|$, nämligen $y = x$ och $y = -x$
(Så kardinaliteten är 2.) – behöver ej anges

Fallet då $x = 0$: Enbart 0 tillhör ekvivalensklassen. $\Rightarrow$
(Kardinaliteten är 1.) – behöver ej anges

(5)

$A = \{3k : k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\}$

$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ (1)

Behöver hitta bijektion mellan A och $\mathbb{Q}$

[alternativt visa att båda uppräkneliga – då följer att $\exists$ bijektion]

Definiera en funktion från A till $\mathbb{Q}$ enligt följande:

$0 \longmapsto \frac{0}{\pm 1} = 0$

$3 \longmapsto \frac{1}{1} = 1$

$-3 \longmapsto -\frac{1}{1} = -1$

$6 \longmapsto \frac{1}{2}$

$-6 \longmapsto -\frac{1}{2}$

$9 \longmapsto \frac{2}{1} = 2$

$-9 \longmapsto -\frac{2}{1} = -2$

$\vdots$

I värdemängden (till höger) räknas de rationella tal upp för vilka $SGD(a,b) = 1$ och

(1)	$a+b = 1$	eller	$a+b = -1$
(2)	–"– 2	——"——	-2
(3)	–"– 3	——"——	-3
(4)	–"– 4	——"——	-4
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$

Dessutom räknas talet 0 upp bara en gång (i början), även om $\frac{0}{2} = 0$, $\frac{0}{3} = 0$ osv.

Denna uppräkning av talen i $\mathbb{Q}$ medför att samtliga tal i $\mathbb{Q}$ kommer att räknas upp(*) och därmed är värdemängden = målmängden, så funktionen är surjektiv. Eftersom enbart tal med $SGD(a,b) = 1$, dvs bråk som ej går att förkorta, tas med i uppräkningen av talen i $\mathbb{Q}$, så kommer inget av talen att förekomma mer än en gång. (Vi ser också att uppräkningen $0, 3\ -3, 6, -6, \dots$ av talen i A innehåller samtliga element i A och varje element förekommer exakt en gång.) Det följer att funktionen är injektiv. Eftersom den är både surjektiv och injektiv så är den alltså bijektiv. Så $|A| = |\mathbb{Q}|$, VSV.

(*) övertyga dig om detta genom att betrakta definitionen (1) av $\mathbb{Q}$

(6) Visa att $3^n > 2^n + 2n$ för $n \geq 2$

Bassteg $n = 2 \Rightarrow$ $VL = 3^2 = 9$, $HL = 2^2 + 2 \cdot 2 = 8$, $9 > 8$ Stämmer

Induktionsantagande (IA)

$3^p > 2^p + 2p$ för något p

Vill visa att

$IA \Rightarrow 3^{p+1} > 2^{p+1} + 2(p+1)$

Bevissteg

$$3^{p+1} = 3 \cdot 3^p \underset{IA}{>} 3 \cdot (2^p + 2p) = (2+1) \cdot 2^p + (2+1) \cdot 2p =$$

$$= 2^{p+1} \underbrace{+ 2^p + 4p}_{>2 \text{ då } p \geq 2} + 2p > 2^{p+1} + 2p + 2 = 2^{p+1} + 2(p+1) \quad \text{VSV}$$

Slutsats: Enligt induktionsprincipen ...

(7) $f(x) = 3x^4 - x^3 + 6x^2 + 23x + 5 = 0$
$g(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x - 35 = 0$ } har gemensam rot

Hitta $SGD(f(x), g(x))$ mha Euklides algoritm:

$$
\begin{array}{rl}
 & 3 \\
f(x) \quad 3x^4 - x^3 + 6x^2 + 23x + 5 & \big|\ x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x - 35 \quad g(x) \\
-(3x^4 - 12x^3 + 6x^2 + 12x - 105) & \\
11x^3 \quad + 11x + 110 &
\end{array}
$$

$$\Rightarrow f(x) = 3 \cdot g(x) + 11x^3 + 11x + 110$$
$$= \boxed{3 \cdot g(x) + 11 \cdot \underbrace{(x^3 + x + 10)}_{r_1}}$$

$$
\begin{array}{rl}
 & x - 4 \\
g(x) \quad x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x - 35 & \big|\ x^3 + x + 10 \quad r_1 \\
-(x^4 \quad + x^2 + 10x) & \\
-4x^3 + x^2 - 6x - 35 & \\
-(-4x^3 \quad - 4x - 40) & \\
x^2 \quad -2x + 5 &
\end{array}
$$

$$\Rightarrow \boxed{g(x) = (x-4)\, r_1(x) + \underbrace{x^2 - 2x + 5}_{r_2(x)}}$$

$$
\begin{array}{rl}
 & x + 2 \\
r_1(x) \quad x^3 \quad + x + 10 & \big|\ x^2 - 2x + 5 \quad r_2(x) \\
-(x^3 - 2x^2 + 5x) & \\
2x^2 - 4x + 10 & \\
-(2x^2 - 4x + 10) & \\
0 &
\end{array}
$$

$$\Rightarrow r_1(x) = (x+2)\, r_2(x) + 0$$

$$\Rightarrow SGD(f(x), g(x)) = x^2 - 2x + 5$$ (Sista nollskillda resten)

$x^2 - 2x + 5 = 0 \iff x = 1 \pm \sqrt{1-5} = \underline{1 \pm 2i}$

Dessa är rötter till båda ekvationerna.

Söker övriga 2 rötter till den första ekvationen $f(x)=0$.

Dividerar $f(x)$ med $SGD(f,g)$:

$$\begin{array}{rl}
 & 3x^2+5x+1 \\
\hline
f(x) \quad 3x^4-x^3+6x^2+23x+5 & \big|\ \underline{x^2-2x+5} \quad r_2(x) \\
-(3x^4-6x^3+15x^2) & \\
\hline
5x^3-9x^2+23x+5 & \\
-(5x^3-10x^2+25x) & \\
\hline
+x^2-2x+5 & \\
-(x^2-2x+5) & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = (3x^2+5x+1)\cdot \underbrace{r_2(x)}_{=0 \iff x = 1\pm 2i}$$

$$3x^2+5x+1=0 \iff x^2+\frac{5}{3}x+\frac{1}{3}=0$$

$$\iff x = -\frac{5}{6} \pm \sqrt{\frac{25}{36}-\frac{12}{36}} = -\frac{5}{6} \pm \frac{\sqrt{13}}{6}$$

Svar: Rötterna till ekvationen $f(x)=0$ är $1\pm 2i$ samt $-\frac{5}{6} \pm \frac{\sqrt{13}}{6}$

(8) $f(x) = ax^3 + bx$ $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ [Svår sista uppgift]

(a) Injektiv? — Obs! Alternativ lösning på nästa sida!

- Fall $a=0, b=0$:

  ej injektiv ty $f(x_1) = f(x_2) = 0 \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

- Fall $a=0, b\neq 0$:

  $f(x) = bx$ injektiv ty $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow bx_1 = bx_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

- Fall $a \neq 0, b = 0$:

  $f(x) = ax^3$ injektiv ty $f'(x) = 3ax^2 > 0 \; \forall x$ så f är monoton

  Alternativt: se lösning till uppgift 3.5 i boken, (eller nästa sida)

- Fall $a \neq 0, b \neq 0$:

  Undersök monotonicitet:

  $f'(x) = 3ax^2 + b = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{b}{3a}}$

  - Delfall $\text{sign}(a) \neq \text{sign}(b)$:

    f' har två distinkta nollställen och byter tecken emellan

    $\Rightarrow f$ ej monoton $\Rightarrow$ f ej injektiv

  - Delfall $\text{sign}(a) = \text{sign}(b)$:

    f' har inget nollställe $\Rightarrow f$ monoton $\Rightarrow$ f injektiv

(b) Surjektiv? $\quad f$ polynom $\Rightarrow$ kontinuerlig $\Rightarrow$ räcker att kolla följande:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \begin{cases} \infty & \text{om } a>0 \\ -\infty & \text{om } a<0 \\ \infty & \text{om } a=0 \text{ och } b>0 \\ -\infty & \text{om } a=0 \text{ och } b<0 \\ 0 & \text{om } a=0 \text{ och } b=0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \begin{cases} -\infty & \text{om } a>0 \\ \infty & \text{om } a<0 \\ -\infty & \text{om } a=0 \text{ och } b>0 \\ \infty & \text{om } a=0 \text{ och } b<0 \\ 0 & \text{om } a=0 \text{ och } b=0 \end{cases}$$

Så f är surjektiv för alla kombitioner av a och b utom $a=b=0$

(c) Bijektiv

Om surjektiv + injektiv.

f är alltså bijektiv för samma värden på a & b som den är injektiv.

(8) Alternativ lösning (analog med bokens lösning av uppg. 3.5)

(a) Injektivitet: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$f(x_1) = f(x_2)$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = f(x_1) - f(x_2) =$$

$$= a x_1^3 + b x_1 - a x_2^3 - b x_2 =$$

$$= \underbrace{a (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2)}_{x_1^3 - x_2^3} + b(x_1 - x_2) =$$

$$= (x_1 - x_2)\left[a(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + b\right] \qquad (*)$$

$$\Leftrightarrow x_1 - x_2 = 0 \quad \underline{\underline{\text{eller}}} \quad a(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + b = 0$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$x_1 = x_2 \qquad\qquad \underbrace{x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2}_{} = -\frac{b}{a} \qquad (\text{antag } a \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\left(x_1 + \frac{1}{2}x_2\right)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{3}{4}x_2^2}_{\geq 0} = -\frac{b}{a} \qquad (**)$$

__Fall (1)__ Om $\text{sign}(a) \neq \text{sign}(b)$ och $a, b \neq 0$ så finns oändligt många x_1 & x_2 som uppfyller $(**)$

$\Rightarrow f$ ej injektiv

__Fall (2)__ Om $a \neq 0, b = 0$ uppfylls $(**)$ enbart om $x_1 = x_2 = 0$

$(*)$ uppfylls alltså omm $x_1 = x_2$ $\Rightarrow$ __f injektiv__

__Fall (3)__ Om $a, b \neq 0$ och $\text{sign}(a) = \text{sign}(b)$ finns inga reella x_1, x_2 som uppfyller $(**)$

$\Rightarrow$ enda sättet för $(*)$ att bli noll är ~~att~~ $x_1 = x_2 \Rightarrow$ __f injektiv!__

Samma som på föregående sida!

__Fall (4)__ Om $a = b = 0$ (kan divisionen ovan, $-\frac{b}{a}$, ej utföras) är funktionen $f = 0 \Rightarrow f$ ej injektiv

ty $\exists x_1 \neq x_2 : f(x_1) = f(x_2)\ (=0)$

__Fall (5)__ Om $a = 0, b \neq 0$ (kan divisionen återigen ej utföras) är $f = bx \Rightarrow f$ injektiv

ty $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow bx_1 = bx_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$