(1) Vi visar (a) och (b) mha tabellen nedan

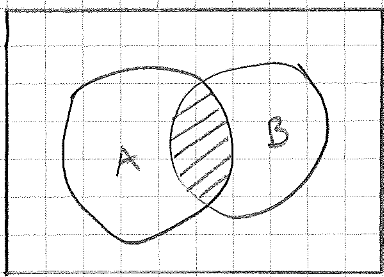
P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$\neg(P\wedge Q)$	$\neg(P \vee Q)$	$(\neg P)\wedge(\neg Q)$	$(\neg P)\vee(\neg Q)$
S	S	F	F	S	S	F	F	F	F
S	F	F	S	F	S	S	F	F	S
F	S	S	F	F	S	S	F	F	S
F	F	S	S	F	F	S	S	S	S
						(1)	(2)	(3)	(4)

(a) $\neg(P\wedge Q) \not\Leftrightarrow (\neg P)\wedge(\neg Q)$ ty kolumnerna (1) och (3) är olika.

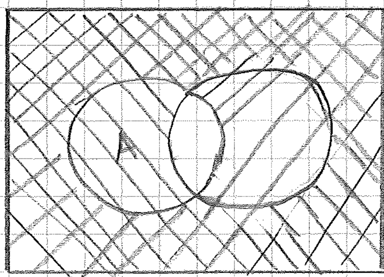
(b) $\neg(P\wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P)\vee(\neg Q)$ " " (1) " (4) " lika.

$\neg(P\vee Q) \Leftrightarrow (\neg P)\wedge(\neg Q)$ " " (2) " (3) " lika.

(c)

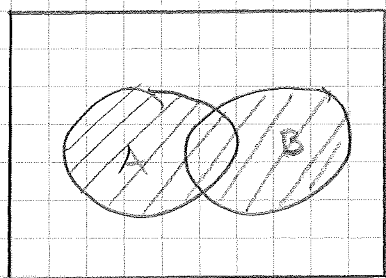


/// = $A \cap B$
vitt = $(A\cap B)^*$

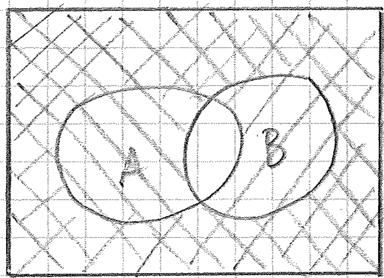


/// = A^* \\\ = B^*
ifyllt = $A^* \cup B^*$

$(A\cap B)^* = A^* \cup B^*$



/// = $A \cup B$
vitt = $(A\cup B)^*$



/// = A^* \\\ = B^*
= $A^* \cap B^*$

$(A\cup B)^* = A^* \cap B^*$

---

2 (a) Reflexivitet:
$x - x = 0 \in \mathbb{Z}$ för alla $x \in \mathbb{R}$, så $x \cong x$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

Symmetri:

Om $x-y \in \mathbb{Z}$, gäller $y-x = -\underbrace{(x-y)}_{\in \mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}$, så $x \cong y \Rightarrow y \cong x$.

Transitivitet:

Om $x-y \in \mathbb{Z}$ och $y-z \in \mathbb{Z}$, gäller $x-z = \overbrace{x-y}^{\in \mathbb{Z}} + \overbrace{y-z}^{\in \mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}$, så

$(x \cong y \wedge y \cong z) \Rightarrow x \cong z$. Därmed är $\cong$ en ekvivalensrelation.

(b) T ex 1 och 1/2.

(c) Vi söker alla tal $x \in \mathbb{R}$ så att $x \cong 3$, dvs $x-3 \in \mathbb{Z}$. Men $x-3 \in \mathbb{Z} \iff x \in \mathbb{Z}$, så den klass som innehåller 3 är $\mathbb{Z}$.

---

3. Kalla antalet kulor för K.

Uppdelning i 8 högar ger 7 kulor över: $K = 8x+7$, $x \in \mathbb{N}$.

" " 15 " " 6 " " : $K = 15y+6$, $y \in \mathbb{N}$.

Dvs $8x+7 = 15y+6 \iff -8x+15y = 1$

Lös diofantisk ekvation:

$SGD(8,15) = 1 \Rightarrow$ lösning finns.

Högerledet är redan 1. Euklides algoritm med 15 och 8 ger:

① $15 = 1\cdot 8 + 7$

② $8 = 1\cdot 7 + 1$

③ $7 = 7\cdot 1 + 0$

Återsubstitution (dvs algoritmen baklänges):

$$1 \overset{②}{=} 8 - 1\cdot 7 \overset{①}{=} 8 - 1\cdot(15 - 1\cdot 8) = 2\cdot 8 - 15$$

Dvs $2\cdot 8 - 15 = 1 \iff (-8)\cdot(-2) + 15\cdot(-1) = 1$, så $\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$

är en lösning. Allmän lösning ges av $\begin{cases} x = -2 + 15n \\ y = -1 + 8n \end{cases}$, $n \in \mathbb{Z}$

Vi ska nu bestämma K; vi använder någon av $K = 8x+7$ och $K = 15y+6$:

$$K = 8x+7 \Rightarrow K = 8(-2+15n) + 7 = 120n - 16 + 7 = 120n - 9$$

Om $n \geq 2$ är $120n - 9 \geq 240 - 9 > 200$, men $K \leq 200$.

Om $n \leq 0$ är $120n - 9 \leq -9 \leq 0$, men negativt K är ej rimligt.

Därmed är $n = 1$ den enda möjligheten, och $K = 120 - 9 = 111$.

Svar: 111 kulor.

4. Funktionen är ej injektiv, ty

$$g(1) = 1$$

$$g(2) = 2/2 = 1 \quad \text{så} \quad g(1) = g(2) \text{ men } 1 \neq 2.$$

Funktionen är surjektiv, ty för varje $m \in \mathbb{N}$ finns det ett jämnt tal n så att $g(n) = \frac{n}{2} = m$, nämligen $n = 2m$.

Svar: Funktionen är surjektiv men inte injektiv.

---

5. $t = (432)_{sju} = 4\cdot 7^2 + 3\cdot 7^1 + 2\cdot 7^0 = 4\cdot 49 + 3\cdot 7 + 2\cdot 1 = 196 + 21 + 2 = 219.$

Entalssiffran i bas 11 är den rest 219^9 lämnar vid division med 11, dvs det minsta positiva tal kongruent med $219^9 \pmod{11}$

Vi ser att $219 \equiv -1 \pmod{11}$, ty $219 = 220 - 1 = 11\cdot 20 - 1$.

Därmed är $219^8 \equiv (-1)^8 = 1 \pmod{11}$.

Svar: $t = \underline{219}$ i bas 10, och t^8 har, i bas 11, entalssiffran $\underline{1}$.

---

6. Vi använder Euklides algoritm på
$$\begin{cases} f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 10x - 15 \\ g(x) = 2x^4 - x^3 - 8x^2 + 5x - 10 \end{cases}$$

Dividera $g(x)$ med $f(x)$:

$$\begin{array}{l} x - 2 \\ \hline 2x^4 - x^3 - 8x^2 + 5x - 10 \quad \big| \ 2x^3 + 3x^2 - 10x - 15 \\ -(2x^4 + 3x^3 - 10x^2 - 15x) \\ \hline -4x^3 + 2x^2 + 20x - 10 \\ -(-4x^3 - 6x^2 + 20x + 30) \\ \hline 8x^2 - 40 \end{array}$$

Rest: $8x^2 - 40 = 8(x^2 - 5) \Rightarrow$

Dividera nu $f(x)$ med resten $8x^2-40$, (eller hellre det associerade polynomet x^2-5, för att få enklare räkningar)

$$
\begin{array}{rl}
2x+3 & \\
\hline
2x^3+3x^2-10x-15 & \big\lfloor\ x^2-5 \\
-(2x^3-10x) & \\
\hline
3x^2-15 & \\
-(3x^2-15) & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Sista nollskilda rest: x^2-5

Rest: $\underline{\underline{0}}$

Dvs x^2-5 är en SGD till $f(x)$ och $g(x)$.

Från divisionen ovan ser vi direkt att $f(x) = (x^2-5)(2x+3)$, dvs:

$$2x^3+3x^2-10x=15 \iff \overbrace{2x^3+3x^2-10x-15}^{f(x)}=0 \iff (x^2-5)(2x+3)=0$$

$$\iff x=\sqrt{5},\ x=-\sqrt{5} \text{ eller } x=-\frac{3}{2}$$

För att lösa den andra ekvationen måste $g(x)$ faktoriseras. Dividera $g(x)$ med SGD:

$$
\begin{array}{rl}
2x^2-x+2 & \\
\hline
2x^4-x^3-8x^2+5x-10 & \big\lfloor\ x^2-5 \\
-(2x^4-10x^2) & \\
\hline
-x^3+2x^2+5x-10 & \\
-(-x^3+5x) & \\
\hline
2x^2-10 & \\
-(2x^2-10) & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Dvs $g(x)=(x^2-5)(2x^2-x+2)$

Därmed är

$$2x^4-x^3-8x^2+5x=10 \iff \overbrace{2x^4-x^3-8x^2+5x-10}^{g(x)}=0 \iff (x^2-5)(2x^2-x+2)=0$$

$$\iff (x^2-5)=0 \text{ eller } x^2-\frac{x}{2}+1=0$$

$$\iff x=\pm\sqrt{5} \text{ eller } x=\frac{1}{4}\pm\sqrt{\frac{1}{16}-1}=\frac{1\pm\sqrt{-15}}{4}=\frac{1\pm i\sqrt{15}}{4}$$

__Svar:__ Den första ekvationen har lösningarna $x=\pm\sqrt{5}$ och $x=-3/2$, den andra har lösningarna $x=\pm\sqrt{5}$ och $x=\frac{1\pm i\sqrt{15}}{4}$

7. <u>Basfall</u> <u>$n=1$</u>: $x_1=9,\ y_1=4 \Rightarrow x_1^2-5y_1^2 = 81-5\cdot 20 = 81-80 = 1$

Basfallet stämmer.

<u>IA</u>: antag att $x_n^2-5y_n^2=1$ för något $n\geq 1$.

<u>Induktionssteg</u>: Visa att $x_{n+1}^2-5y_{n+1}^2=1$.

Vi har $x_{n+1}=x_1x_n+5y_1y_n$ och $y_{n+1}=x_1y_n+y_1x_n$, så att

$$\underline{x_{n+1}^2-5y_{n+1}^2} = (x_1x_n+5y_1y_n)^2-5(x_1y_n+y_1x_n)^2 =$$

$$= x_1^2x_n^2+10x_1x_ny_1y_n+25y_1^2y_n^2-5(x_1^2y_n^2+2x_1y_ny_1x_n+y_1^2x_n^2) =$$

$$= x_1^2x_n^2+\cancel{10x_1x_ny_1y_n}+25y_1^2y_n^2-5x_1^2y_n^2-\cancel{10x_1y_ny_1x_n}-5y_1^2x_n^2 =$$

$$= x_1^2x_n^2-5x_1^2y_n^2+25y_1^2y_n^2-5y_1^2x_n^2 =$$

Bryt ut!

$$= x_1^2(x_n^2-5y_n^2)-5y_1^2(x_n^2-5y_n^2)$$

$$\stackrel{\text{I.A.}}{=} x_1^2\cdot 1-5y_1^2\cdot 1 = x_1^2-5y_1^2 = 81-80 = \underline{\underline{1}}.$$

Ovanstående och induktionsprincipen visar att $x_n^2-5y_n^2=1$ för alla $n\geq 1$.

---

8. Primtalsfaktoriseringen av $4n+3$ är $4n+3=p_1\cdot p_2\cdots p_k$ där $p_1,p_2,\dots,p_k$ är primtal. Vad är primtalen kongruenta med (mod 4)? Det finns 4 möjligheter för varje p_i:

$p_i\equiv 0 \pmod 4$, dvs $4\mid p_i$: ej möjligt ty p_i primtal.

$p_i\equiv 1 \pmod 4$, dvs $p_i=4n_i+1$ för något $n_i\in\mathbb{Z}$.

$p_i\equiv 2 \pmod 4$, dvs p_i jämnt : ej möjligt ty $4n+3$ är udda, så alla faktorer är udda

$p_i\equiv 3 \pmod 4$, dvs $p_i=4n_i+3$ för något $n_i\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow$

Antag att det inte finns något primtal på form $4n_i+3$. Då måste alla p_i vara på form $4n_i+1$, enligt ovan. Men då är

$$4n+3 = p_1 \cdot p_2 \cdots p_k = (4n_1+1)(4n_2+1)\cdots(4n_k+1) \equiv 1\cdot 1\cdots 1 \equiv 1 \pmod 4$$

dvs $4n+3$ är produkten av k primtal, som alla är kongruenta med 1 (mod 4), så $4n+3 \equiv 1 \pmod 4$; men $4n+3 \equiv 3$ mod 4 $\Rightarrow$ $\lightning$ (motsägelse).

Alltså måste minst ett p_i avvika och inte ha formen $4n_i+1$, så det måste vara kongruent med 3 (mod 4). $\square$