UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Inger Sigstam

Tentamen
ALGEBRA I, 5 hp
2015-01-08
DataKand, IT, MaKand
Frist,Lärar

Skrivtid: 8.00 – 13.00. Inga hjälpmedel. Lösningarna skall åtföljas av förklarande text. Varje uppgift ger högst 5 poäng. För betygen 3 (4) (5) krävs minst 18 (25) (32) poäng inklusive ev bonuspoäng.

1. (a) Avgör med sanningsvärdestabell vilka (om några) av utsagorna

$$\neg((\neg p) \vee q) \qquad \neg(p \wedge (\neg q)) \qquad \neg(p \Longrightarrow q)$$

som är ekvivalenta.

(b) Låt A, B och C vara mängder i ett universum U. Visa, t ex med ett Venn-diagram, att

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

2. (a) Ange definitionen av $a|b$ för heltal a och b.

(b) Avgör för följande påståenden om de är sanna eller falska. Ge bevis för de påståenden som du anser vara sanna. Ge motexempel till de påståenden som du anser vara falska.

(i) Om a, b och c är heltal och $a|b$ och $a|c$, så $a|(2b+3c)$.

(ii) Om a, b och c är heltal och $a|c$ och $b|c$, så $ab|c$.

3. Vilken blir den minsta positiva resten då talet 350^{357} delas med 11?

4. Ekvationen $x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 12x + 45 = 0$ har en heltalsrot, som också är en dubbelrot. Lös ekvationen!

5. Polynomet $g(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 6x - 6$ har minst ett nollställe gemensamt med $h(x) = x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 12x - 15$. Finn samtliga nollställen till båda polynomen.

6. På mängden $\mathbf{C}$ av komplexa tal definieras en relation P på följande sätt:

$$zPw \Longleftrightarrow z - w = bi \text{ för något } b \in \mathbf{R}.$$

(a) Visa att P är en ekvivalensrelation på $\mathbf{C}$.

(b) Vilka tal ingår i ekvivalensklassen $[2+3i]$?

(c) Beskriv samtliga ekvivalensklasser och skissa några av dem i det komplexa talplanet.

Var god vänd!

7. Låt $A = \{n \in \mathbf{Z} : n \geq 7\}$ och $B = \{m \in \mathbf{Z} : m \geq 1 \text{ och } m \text{ udda}\}$.

   (a) Konstruera en bijektiv funktion från A till B. Glöm inte att visa att din funktion är bijektiv.

   (b) Vilken (om någon) slutsats kan man dra om kardinaliteterna för mängderna A och B från informationen i uppgift (a)?

8. Låt talföljden $a_0, a_1, a_2, \ldots$ definieras av att $a_0 = 5$, $a_1 = 3$ och $a_k = a_{k-1} + a_{k-2}$ för $k \geq 2$. Varje tal i följden (utom de två första) är alltså summan av de två närmast föregående talen. Visa att

$$\sum_{k=0}^{2n-1} a_k a_{k+1} = (a_{2n})^2 - 25$$

för alla heltal $n \geq 1$.

LYCKA TILL!!