1a)

p	q	$\neg p$	$(\neg p) \vee q$	$\neg((\neg p) \vee q)$
S	S	F	S	F
S	F	F	F	S
F	S	S	S	F
F	F	S	S	F

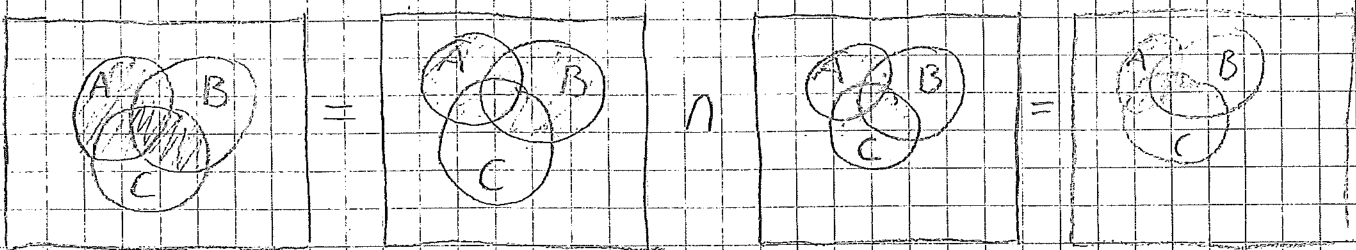
p	q	$\neg q$	$p \wedge (\neg q)$	$\neg(p \wedge (\neg q))$
S	S	F	F	S
S	F	S	S	F
F	S	F	F	S
F	F	S	F	S

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg(p \Rightarrow q)$
S	S	S	F
S	F	F	S
F	S	S	F
F	F	S	F

Svar: Den första utsagan är ekvivalent med den tredje.

b) A, B och C är mängder i universum U.

$A \cup (B \cap C) \quad = \quad (A \cup B) \quad \cap \quad (A \cup C)$



V.S.B.

2 a) Definitionen av $a|b$ för heltal a och b.

$a \cdot n = b$, där $n \in \mathbb{Z}$.

b) (i) Om a, b och c är heltal och $a|b$ och $a|c$, så $a|(2b+3c)$

Sant, eftersom $a|b$ kan skrivas som $a \cdot n_1 = b$ och $a|c$ kan skrivas som $a \cdot n_2 = c$. Då kan vi skriva $a|(2b+3c)$ som $a|((2a \cdot n_1) + (3 \cdot an_2))$. Eftersom a finns i båda termerna kan man dela $(2an_1 + 3an_2)$ med a. V.S.B.

(ii) Om a, b och c är heltal och $a|c$ och $b|c$, så $ab|c$

Falskt, låt t.ex. $a = 4$, $b = 6$, $c = 12$.

$4|12$ och $6|12$, men $4 \cdot 6 \nmid 12$, eftersom $24 \nmid 12$.

3, Minsta positiva resten då talet 350^{357} delas med 11.

$350^{357} \equiv (-2)^{357} \equiv (-32)^{71} \cdot (-2)^2 \equiv 1^{71} \cdot 4 \equiv 4 \pmod{11}$

motivera

Svar: minsta positiva resten blir 4 då talet 350^{357} delas med 11.

4, $x^4+4x^3+2x^2+12x+45=0$ har heltalsrot som är en dubbelrot.

Enligt sats för rationella rötter i polynom är möjliga rötter $\frac{p}{q}$ där $p|$(konstanten) och $q|$(koefficienten före högsta graden). Vi får möjliga rötter till x att vara ± 1, ± 3, ± 5, ± 9, ± 15, ± 45. Efter insättning får vi att $x=-3$ som är en dubbelrot. Vi kan då dela polynomet $x^4+4x^3+2x^2+12x+45$ med $(x+3)^2 = x^2+6x+9$

$$
\begin{array}{l}
\quad x^2-2x+5 \\
\hline
x^4+4x^3+2x^2+12x+45 \;\big|\; x^2+6x+9 \\
-(x^4+6x^3+9x^2) \\
\quad -2x^3-7x^2+12x+45 \\
\quad -(-2x^3-12x^2-18x) \\
\qquad 5x^2+30x+45 \\
\qquad -(5x^2+30x+45) \\
\hline
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$x^4+4x^3+2x^2+12x+45=0$

$(x^2+6x+9)(x^2-2x+5)=0$

x^2+6x+9 har dubbelroten $x=-3$

Vi undersöker när:

$x^2-2x+5=0$

$x = 1 \pm \sqrt{1^2-5} = 1 \pm \sqrt{-4} = 1 \pm 2i$ (pq formeln ger $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$)

Svar: Lösningarna till polynomekvationen är $x=-3$, $x=1+2i$ och $x=1-2i$.

5.

1) $x^4+4x^3+2x^2-12x-15 \,\big|\, x^4+2x^3-x^2-6x-6$ $\quad$ (kvot: 1)

$\quad 2x^3+3x^2-6x-9$

$h(x) = g(x) + (2x^3+3x^2-6x-9) = g(x) + r_1(x)$

2)
$$\begin{array}{l} \frac{x}{2}+\frac{1}{4} \\ x^4+2x^3-x^2-6x-6 \,\big|\, 2x^3+3x^2-6x-9 \\ -\left(x^4+\frac{3x^3}{2}-3x^2-\frac{9x}{2}\right) \\ \hline \frac{x^3}{2}+2x^2-\frac{3x}{2}-6 \\ -\left(\frac{x^3}{2}+\frac{3x^2}{4}-\frac{3x}{2}-\frac{9}{4}\right) \\ \hline \frac{5x^2}{4}-\frac{15}{4} \end{array}$$

$$g(x) = \left(\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right) r_1(x) + \left(\frac{5x^2}{4}-\frac{15}{4}\right) = \frac{5}{4}\left(\left(\frac{2x}{5}+\frac{1}{5}\right) r_1(x) + \overbrace{(x^2-3)}^{r_2(x)}\right)$$

3)
$$\begin{array}{l} 2x+3 \\ 2x^3+3x^2-6x-9 \,\big|\, x^2-3 \\ -(2x^3-6x) \\ \hline 3x^2-9 \\ \hline 0 \end{array}$$

$r_1(x) = (2x+3)\, r_2(x) \Rightarrow r_2(x) \mid r_1(x) \Rightarrow r_2(x) \mid g(x) \Rightarrow r_2(x) \mid h(x)$

4) $x^4+4x^3+2x^2-12x-15 = (x^2-3)(x^2+4x+5)$

$x = \pm\sqrt{3} \quad \lor \quad x^2+4x+5 = 0$

$x = -2 \pm \sqrt{4-5} = -2 \pm i$

5) $x^4+2x^3-x^2-6x-6 = (x^2-3)(x^2+2x+2)$

$x = \pm\sqrt{3} \quad \lor \quad x = -1 \pm \sqrt{-1} = -1 \pm i$

Svar: $g(x)$ har nollställena $x=\sqrt{3}$, $x=-\sqrt{3}$, $x=-2+i$ och $x=-2-i$; $h(x)$ har nollst

$x=\sqrt{3}$, $x=-\sqrt{3}$, $x=-1+i$ och $x=-1-i$

6. På mängden $\mathbb{C}$ av komplexa tal definieras en relation P:

$zPw \Leftrightarrow z-w=bi$ för något $b\in\mathbb{R}$.

a) Visa att P är en ekvivalensrelation på $\mathbb{C}$.

1) Reflexiv, eftersom $zPz \Leftrightarrow z-z=bi \Leftrightarrow 0=bi$, vilket är sant om $b=0$.

2) Symmetrisk, eftersom $zPw \Leftrightarrow z-w=bi$ och $wPz \Leftrightarrow w-z=-(z-w)=-bi$. Sant.

3) Transitiv, eftersom $zPw \Leftrightarrow z-w=b_1i$ och $wPy \Leftrightarrow w-y=b_2i$ och $zPy \Leftrightarrow z-y=(z-w)+(w-y)=b_1i+b_2i=(b_1+b_2)i$. Sant

v.s.b.

b) Vilka tal ingår i ekvivalensklassen $[2+3i]$?

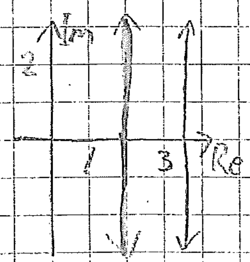
$(2+3i)Pw \Leftrightarrow 2+3i-w=bi$ för något $b\in\mathbb{R}$

Eftersom realdelen i HL $=0$ måste realdelen i VL $=0$

$w=2+ai$, där $a\in\mathbb{R}$

Svar: Talen $2+ai$, där $a\in\mathbb{R}$ ingår i ekvivalensklassen $[2+3i]$

c)



Alla tal med samma realdel ingår i samma ekvivalensklass.

7. $A = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 7\}$ och $B = \{m \in \mathbb{Z} : m \geq 1$ och m udda$\}$

a) Konstruera bijektiv funktion från A till B.

1) $f(n) = 2n - 13$

3) Surjektiv, eftersom vi kan gå från m till n genom

$g(m) = \frac{m+13}{2}$

$g(1) = \frac{1+13}{2} = 7$, $g(3) = \frac{3+13}{2} = 8$ o. s. v. v.s.b.

4) Bijektiv eftersom injektiv och surjektiv.

b) En slutsats är att A och B har samma kardinalitet.

8. Talföljden $a_0, a_1, a_2, \ldots$ defineras av att $a_0 = 5$, $a_1 = 3$ och

$a_k = a_{k-1} + a_{k-2}$ för $k \geq 2$.

Visa $\sum_{k=0}^{2n-1} a_k a_{k+1} = (a_{2n})^2 - 25$ för alla heltal $n \geq 1$.

1) Bassteget!

Låt $n = 1$

$$VL = \sum_{k=0}^{2\cdot 1-1} a_k a_{k+1} = a_0 a_1 + a_1 a_2 = 5 \cdot 3 + 3 \cdot (5+3) = 15 + 24 = 39$$

$$HL = (a_{2 \cdot 1})^2 - 25 = (5+3)^2 - 25 = 64 - 25 = 39 \quad \text{sant.}$$

2) Induktionsaxiomet.

Låt $n = p$

$$\sum_{k=0}^{2p-1} a_k a_{k+1} = (a_{2p})^2 - 25 \quad (IA)$$

3) Induktionssteget

Låt $n = p+1$ Vi vill visa att $\sum_{k=0}^{2(p+1)-1} a_k a_{k+1} = (a_{2(p+1)})^2 - 25$

$$\sum_{k=0}^{2(p+1)-1} a_k a_{k+1} = \sum_{k=0}^{2p+1} a_k a_{k+1} = \sum_{k=0}^{2p-1} a_k a_{k+1} + a_{2p} a_{2p+1} + a_{2p+1} a_{2p+2} \overset{(IA)}{=}$$

$$\overset{(IA)}{=} (a_{2p})^2 - 25 + a_{2p} a_{2p+1} + a_{2p+1} a_{2p+2} = a_{2p}(a_{2p} + a_{2p+1}) + a_{2p+1} a_{2p+2} - 25 =$$

$$= a_{2p} a_{2p+2} + a_{2p+1} a_{2p+2} - 25 = a_{2p+2}(a_{2p} + a_{2p+1}) - 25 = (a_{2(p+1)})^2 - 25. \quad \text{V.S.B.}$$

Sant enligt induktionsprincipen.