UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Dan Strängberg

Tentamen i matematik
Algebra 1
2016-08-26

1. Låt $P(x)$ och $Q(x)$ vara två öppna utsagor vars sanningsvärde beror på en variabel x i ett universum X och låt A, B vara mängderna $A = \{x \in X \colon P(x)\}$ och $B = \{x \in X \colon Q(x)\}$. Beskriv följande mängder i termer A och B med hjälp av snitt, union, mängddifferens och komplement.

   (a) $\{x \in X \colon P(x) \wedge Q(x)\}$, (1 poäng)

   (b) $\{x \in X \colon P(x) \Rightarrow Q(x)\}$, (2 poäng)

   (c) $\{x \in X \colon (P(x) \vee Q(x)) \wedge \neg(P(x) \wedge Q(x))\}$. (2 poäng)

   Lösning. (a) $A \cap B$.

   (b) $(A \setminus B)^c$ eller $(A \cap B) \cup A^c$.

   (c) $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

   □

2. Visa att den Diofantiska ekvationen $91x + 50y = 2$ har lösningar. Lös sedan ekvationen fullständigt. (5 poäng)

   Lösning. För att se om ekvationen har lösningar undersöker vi vad $\mathrm{SGD}(91, 50)$ är. Vi kan göra detta med Euklides algoritm:

$$
\begin{aligned}
91 &= 1 \cdot 50 + 41 \\
50 &= 1 \cdot 41 + 9 \\
41 &= 4 \cdot 9 + 5 \\
9 &= 1 \cdot 5 + 4 \\
5 &= 1 \cdot 4 + 1 \\
4 &= 4 \cdot 1
\end{aligned}
$$

   Här tar Euklides algoritm slut och den sista nollskilda resten är 1 och därför har vi att $\mathrm{SGD}(91, 50) = 1$. Eftersom $\mathrm{SGD}(91, 50) \mid 2$ har ekvationen lösningar. Alternativt kan vi använda primtalsfaktorisringarna av 91 och 50 för att se att de saknar äkta gemensamma delare.

   För att hitta dessa lösningar ställer vi först upp hjälpekvationen

$$91x + 50y = 1.$$

Genom att använda Euklides algoritm baklänges kan vi hitta lösningar till hjälpekvationen:

$$\begin{aligned}1 &= 5 - 4\\ &= 5 - (9 - 5) = 2 \cdot 5 - 9\\ &= 2 \cdot (41 - 4 \cdot 9) - 9 = 2 \cdot 41 - 9 \cdot 9\\ &= 2 \cdot 41 - 9 \cdot (50 - 41) = 11 \cdot 41 - 9 \cdot 50\\ &= 11 \cdot (91 - 50) - 9 \cdot 50 = 11 \cdot 91 - 20 \cdot 50\end{aligned}$$

Så hjälpekvationen har lösningen $x_0 = 11$, $y_0 = -20$ och därför har den ursprungliga ekvationen lösningen $x_0 = 22$, $y_0 = -40$. Det följer då att ekvationens samtliga lösningar ges av $x = 22 + 50n$, $y = -40 - 91n$. □

3. (a) Skriv talet $(110321)_4$ i bas 10. (2 poäng)
   (b) Bestäm resten som fås då 9^{387} delas med 7. (3 poäng)

Lösning. (a)

$$\begin{aligned}(110321)_4 &= 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4^4 + 1 \cdot 4^5\\ &= 1 + 8 + 48 + 256 + 1024\\ &= 1337\end{aligned}$$

så $(110321)_4 = (1337)_{10}$.

(b) Vi räknar med kongruns modulo 7:

$$9^{387} \equiv 2^{387} \equiv 2^{3 \cdot 129} \equiv 8^{129} \equiv 1^{129} \equiv 1 \mod 7$$

och därför blir resten 1.

□

4. Låt relationen R på heltalen vara definierad av $xRy \Leftrightarrow 12 \,|\, x - y$.
   (a) Relationen R har ett speciellt namn. Vilket? (1 poäng)
   (b) Visa att relationen R är en ekvivalensrelation. (3 poäng)
   (c) Hur många ekvivalensklasser har R?. (1 poäng)

Lösning. (a) Relationen kallas kongruens modulo 12.

(b) Vi behöver visa att den är reflexiv, symmetrisk och transitiv.

Reflexiv: För alla heltal x gäller att $x - x = 0$ så $12 \,|\, x - x$ och därför är relationen reflexiv.

Symmetrisk: Antag att xRy så att $12 \mid x - y$. Eftersom $y - x = -(x - y)$ måste vi därför också ha $12 \mid y - x$ så relationen är symmetrisk.

Transitiv: Antag att xRy och yRz så att $12 \mid x - y$ och $12 \mid y - z$. Genom att addera 0 på ett fiffigt vis får vi $x - z = x - y + y - z$ och eftersom 12 delar både $x - y$ och $y - z$ måste 12 också dela deras summa som är just $x - z$. Därför är relationen transitiv.

(c) Ekvivalensklasserna kallas restklasser och motsvarar de möjliga resterna vid division med 12, alltså har relationen 12 ekvivalensklasser.

□

5. Visa med induktion att $n^3 \le 3^n$ för alla heltal $n \ge 3$. (5 poäng)

Lösning. Låt $VL_n = n^3$ och $HL_n = 3^n$.

Basfall: Vi använder fallet $n = 3$ som basfall. Vi har då $VL_3 = 3^3 = 27$ och $HL_3 = 3^3 = 27$ så $VL_3 \le HL_3$.

Induktionsantagande: Antag att $VL_n \le HL_n$ för alla heltal n som uppfyller $3 \le n \le p$.

Induktionssteg: För $n = p + 1$ har vi, eftersom $p \ge 3$,

$$\begin{aligned}
VL_{p+1} &= (p+1)^3 \\
&= p^3 + 3p^2 + 3p + 1 \\
&\le p^3 + p^3 + p^2 + 1 \\
&\le p^3 + p^3 + p^2 + p^2 \\
&\le p^3 + p^3 + 2p^2 \\
&\le p^3 + p^3 + p^3 \\
&= 3p^3 \\
&\le 3 \cdot 3^p && \text{(enl. IA)} \\
&= 3^{p+1} \\
&= HL_{p+1}
\end{aligned}$$

så vi har $VL_{p+1} \le HL_{p+1}$.

Enligt induktionsprincipen gäller därför $VL_n \le HL_n$ för alla heltal $n \ge 3$. □

6. (a) Vad betyder det att en funktion är injektiv respektive surjektiv? Återge definitionerna. (2 poäng)

(b) Konstruera en surjektiv funktion. Bevisa att funktionen är surjektiv. (3 poäng)

Lösning. (a) En funktion $f\colon X \to Y$ är injektiv om $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, eller ekvivalent $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Funktionen f är surjektiv om det för varje $y \in Y$ finns ett $x \in X$ sådant att $y = f(x)$.

(b) Vi kan välja identitetsfunktionen på en mängd, till exempel $\mathbb{N}$, d.v.s. funktionen $\mathrm{id}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ som uppfyller $\mathrm{id}(n) = n$ för alla naturliga tal n. Denna är surjektiv eftersom att för varje naturligt tal n har vi då $n = \mathrm{id}(n)$.

□

7. Hitta samtliga nollställen till polynomet $p(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 7x - 42$. (5 poäng)

Lösning. Vi ser att det är ett heltalspolynom så vi börjar leta efter rationella nollställen. Eftersom koefficienten framför x^4 är 1 så måste dessutom alla sådana nollställen vara heltal som delar konstanttermen -42. Möjligheterna är alltså $\pm 1, \pm 2 \pm 3, \pm 6, \pm 7, \pm 14, \pm 21, \pm 42$. Genom att testa oss fram ser vi att

$$p(-2) = 16 + 8 + 4 + 14 - 42 = 0,$$

$$p(3) = 81 - 27 + 9 - 21 - 42 = 0.$$

Vi faktoriserar därför ut $(x+2)(x-3) = x^2 - x - 6$ ur p med polynomdivision:

$$\begin{array}{rl}
x^2 + 7 & \\
\hline
x^4 - x^3 + x^2 - 7x - 42 & \big|\; x^2 - x - 6 \\
-(x^4 - x^3 - 6x^2) & \\
\hline
7x^2 - 7x - 42 & \\
-(7x^2 - 7x - 42) & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Vi ser alltså att $p(x) = (x+2)(x-3)(x^2+7)$. Slutligen har $x^2 + 7$ nollställen $x = \pm i\sqrt{7}$. Samtliga nollställen är således $x = -2, 3, \pm i\sqrt{7}$. □

8. Låt $p_1(x)$, $p_2(x)$ och $p_3(x)$ vara tre polynom.

(a) Visa att om $p_3 \mid p_1$ och $p_3 \mid p_2$ så gäller även att $p_3 \mid p_1 + p_2$. (2 poäng)

(b) Visa att om $p_3 \mid p_2$ så gäller även att $p_3 \mid p_2 p_1$. (2 poäng)

(c) För division med heltal gäller alltid att resten är mindre än delaren, d.v.s. att om $n = qm + r$ så gäller alltid $0 \leq r < m$. Vad är motsvarande förhållande mellan delare och rest för division av polynom? (1 poäng)

Lösning. (a) Eftersom p_3 delar både p_1 och p_2 finns det två polynom q_1 och q_2 sådana att $p_1 = p_3 q_1$ och $p_2 = p_3 q_2$. Vi ser då att

$$p_1 + p_2 = p_3 q_1 + p_3 q_2 = p_3(q_1 + q_2)$$

så $p_3 \mid p_1 + p_2$.

(b) Eftersom $p_3 \mid p_2$ finns ett polynom q sådant att $p_2 = p_3 q$. Då har vi att

$$p_2 p_1 = p_3 q p_1 = p_3(q p_1)$$

så $p_3 \mid p_2 p_1$.

(c) Resten har alltid lägre grad än delaren.

□