UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Dan Strängberg

Tentamen i matematik
Algebra 1
2016-12-16

Skrivtid: 5 timmar. Tillåtna hjälpmedel: endast skrivdon. Varje uppgift ger högst 5 poäng. För betygen 3, 4 och 5 krävs minst 18, 25, resp. 32 poäng, inklusive ev. bonuspoäng. Lösningarna skall åtföljas av förklarande text. För full poäng krävs att du noggrannt motiverar varje steg i ditt resonemang. Påbörja varje uppgift på ett nytt blad. Lycka till!

1. (a) Låt A och B vara två utsagor. Undersök sanningsvärdet för utsagan

$$(A \vee \neg B) \ \Leftrightarrow \ (\neg A \ \Rightarrow \ B)\,.$$

(2 poäng)

(b) Låt $M = \{x \in \mathbb{R} : \ x^2 \leq 16\}$ och $N = \{x \in \mathbb{Z} : \ 2 \,|\, x\}$. Bestäm $M \cap N$. (3 poäng)

Lösning. (a) Vi ställer upp en sanningsvärdestabell.

A	B	$A \vee \neg B$	$\neg A \ \Rightarrow \ B$	$(A \vee \neg B) \ \Leftrightarrow \ (\neg A \ \Rightarrow \ B)$
S	S	S	S	S
S	F	S	S	S
F	S	F	S	F
F	F	S	F	F

(b) Mängden M kan skrivas som $M = \{x \in \mathbb{R}\colon \ -4 \leq x \leq 4\}$. Mängden N består av alla jämna heltal. Därför får vi

$$M \cap N = \{x \in \mathbb{Z}\colon \ (2 \,|\, x\,) \wedge (-4 \leq x \leq 4)\} = \{-4, -2, 0, 2, 4\}\,.$$

□

2. (a) Visa att den Diofantiska ekvationen $520x - 216y = 4$ saknar lösningar. (2 poäng)

(b) Lös den Diofantiska ekvationen $520x - 216y = 8$ fullständigt. (3 poäng)

Lösning. (a) En Diofantisk ekvation $ax + by = c$ har lösningar om och endast om $\mathrm{SGD}(a, b)$ delar c. Vi vill därför hitta $\mathrm{SGD}(520, 216)$. För detta använder vi Euklides algoritm:

$$\begin{aligned} 520 &= 2 \cdot 216 + 88 \\ 216 &= 2 \cdot 88 + 40 \\ 88 &= 2 \cdot 40 + 8 \\ 40 &= 5 \cdot 8\,. \end{aligned}$$

Den sista nollsklida resten är 8 vilket betyder att $\mathrm{SGD}(520, 216) = 8$. Eftersom 8 inte delar 4 saknar ekvationen lösningar.

(b) Vi börjar med att förkorta ekvationen:

$$520x - 216y = 8 \;\Leftrightarrow\; 65x - 27y = 1\,.$$

Genom att använda Euklides algoritm från (a) kan vi skriva 8 som en kombination av 520 och 216:

$$\begin{aligned} 8 &= 88 - 2 \cdot 40 \\ &= 88 - 2 \cdot (216 - 2 \cdot 88) \\ &= 5 \cdot 88 - 2 \cdot 216 \\ &= 5 \cdot (520 - 2 \cdot 216) - 2 \cdot 216 \\ &= 5 \cdot 520 - 12 \cdot 216 \\ &= 520 \cdot 5 - 216 \cdot 12\,. \end{aligned}$$

Vi får alltså $520 \cdot 5 - 216 \cdot 12 = 8 \;\Leftrightarrow\; 65 \cdot 5 - 27 \cdot 12 = 1$. Vi ser att $x_0 = 5$ och $y_0 = 12$ löser ekvationen. Den allmänna lösningen ges då av $x = 5 + 27n$ och $y = 12 + 65n$ där $n \in \mathbb{Z}$.

□

3. (a) Låt a vara ett heltal sådant att $4 \mid a + 1$. Visa att $8 \mid a^2 - 1$. (3 poäng)
(b) Skriv talet $(2131)_5$ i bas 10. (2 poäng)

Lösning. (a) Eftersom $4 \mid a + 1$ kan vi skriva $a = 4k - 1$ för något heltal k. Vi får då

$$\begin{aligned} a^2 &= (4k-1)^2 \\ &= 16k^2 - 8k + 1 \\ \Rightarrow\; a^2 - 1 &= 16k^2 - 8k \\ &= 8(2k^2 - k)\,. \end{aligned}$$

Alltså gäller att $8 \mid a^2 - 1$.

(b) Vi skriver ut vad $(2131)_5$ betyder:

$$\begin{aligned} (2131)_5 &= 2 \cdot 5^3 + 1 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^1 + 1 \cdot 5^0 \\ &= 250 + 25 + 15 + 1 \\ &= 291\,. \end{aligned}$$

Så $(2131)_5 = 291$.

□

4. På mängden av reella tal införs en relation R som ges av $aRb \Leftrightarrow |a-b| < 4$. Bestäm vilka av egenskaperna reflexiv, symmetrisk, transitiv som relationen R uppfyller.

(5 poäng)

Lösning. Relationen är reflexiv eftersom att för varje reellt tal a gäller $|a-a| = 0 < 4$, så vi har aRa för varje reellt tal a.

Låt nu a, b vara två reella tal sådana att aRb. Vi har då att $|a-b| < 4$. Vi får då

$$|b-a| = |-(a-b)| = |a-b| < 4 \;\Leftrightarrow\; bRa\,.$$

Alltså gäller $aRb \;\Rightarrow\; bRa$ och relationen är därför symmetrisk.

Relationen är inte transitiv. Som motexempel kan vi ta $a = 6, b = 3, c = 0$. Då gäller $|a-b| = 3 < 4$ och $|b-c| = 3$ så vi har både aRb och bRc men $|a-c| = 6 \geq 4$ så vi har inte aRc.

Relationen är alltså reflexiv och symmetrisk men inte transitiv. $\square$

5. Visa med induktion att $(n+1)^2 \leq n^3$ för alla naturliga tal $n \geq 3$. (5 poäng)

Lösning. Låt $VL_n = (n+1)^2$ och $HL_n = n^3$. Vi vill alltså visa att $VL_n \leq HL_n$ för alla naturliga tal $n \geq 3$. Vi börjar med basfallet $n = 3$.

Basfall: Vi har $VL_3 = 4^2 = 16 \leq 27 = 3^3 = HL_3$ så basfallet stämmer.

Induktionsantagande: Antag att $VL_p \leq HL_p$ för något naturligt tal $p \geq 3$.

Induktionssteg: Vi har

$$\begin{aligned}
VL_{p+1} &= (p+2)^2 \\
&= ((p+1)+1)^2 \\
&= (p+1)^2 + 2(p+1) + 1 \\
&\leq p^3 + 2(p+1) + 1 && \text{(enligt IA)} \\
&= p^3 + 2p + 2 + 1 \\
&\leq p^3 + 3p^2 + 3p + 1 \\
&= (p+1)^3 \\
&= HL_{p+1}\,,
\end{aligned}$$

så vi har $VL_{p+1} \leq HL_{p+1}$.

Enligt induktionsprincipen följer därför att $VL_n \leq HL_n$ för alla naturliga tal $n \geq 3$. $\square$

6. Låt M vara mängden av jämna heltal och låt funktionen $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ ges av $f(n) = \frac{n}{2}$. Visa att $f(M) = \mathbb{Z}$ och att f ger en bijektion mellan M och $\mathbb{Z}$. (5 poäng)

   Lösning. Eftersom M enbart består av jämna tal kan varje tal i M skrivas som $2k$ där k är något heltal, d.v.s. $M = \{n \in \mathbb{Z}\colon n = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$. Vi får därför $f(n) = f(2k) = \frac{2k}{2} = k$ så f avbildar varje element i M på ett heltal och varje heltal träffas eftersom M innehåller $n = 2k$ för varje heltal k. Vi har alltså $f(M) = \mathbb{Z}$. Detta betyder också att f är en surjektion från M till $\mathbb{Z}$. Kvar återstår därför att visa att det också är en injektion. Antag därför att $f(n_1) = f(n_2)$. Eftersom $n_1 = 2k_1$ och $n_2 = 2k_2$ kan vi skriva $f(n_1) = f(n_2) \Leftrightarrow f(2k_1) = f(2k_2) \Leftrightarrow k_1 = k_2$, men $k_1 = k_2 \Rightarrow n_1 = 2k_1 = 2k_2 = n_2$ så f är en injektion från M till $\mathbb{Z}$. □

7. Polynomet $x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 12x - 6$ har ett imaginärt nollställe. Hitta samtliga nollställen. (5 poäng)

   Lösning. Vi ansätter ett nollställe $x = ib$ där $b \in \mathbb{R}$. Detta ger oss då

$$\begin{aligned} 0 &= (ib)^4 - 2(ib)^3 + 5(ib)^2 - 12(ib) - 6 \\ &= b^4 + 2ib^3 - 5b^2 - 12ib - 6\,. \end{aligned}$$

Eftersom realdelen och imaginärdelen båda måste bli 0 får vi två ekvationer som båda måste vara uppfyllda:

$$\begin{aligned} b^4 - 5b^2 - 6 &= 0 && \text{(realdel)}\,, \\ 2b^3 - 12b &= 0 && \text{(imaginärdel)}\,. \end{aligned}$$

Vi ger oss på den andra ekvationen.

$$2b^3 - 12b = 2b(b^2 - 6) = 0$$

Vi kan se att ekvationen har lösningar $b = 0$ och $b = \pm\sqrt{6}$. Lösningen $b = 0$ kan inte stämma eftersom den inte uppfyller ekvationen för realdelen. Lösningarna $b = \pm 6$ uppfyller båda ekvationerna. Alltså har polynomet de två imaginära nollställena $x = \pm i\sqrt{6}$. Det följer att polynomet är delbart med $(x^2 + 6)$. Vi utför divisionen.

$$\begin{array}{rl}
x^2 - 2x - 1 & \\
\hline
x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 12x - 6 & \big|\; x^2 + 6 \\
-(x^4 + 6x^2) \qquad\qquad\qquad & \\
\hline
-2x^3 - x^2 - 12x - 6 & \\
-(-2x^3 - 12x) \qquad & \\
\hline
-x^2 - 6 & \\
-(-x^2 - 6) & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Vi ser alltså att polynomet kan skrivas som $(x^2+6)(x^2-2x-1)$. Genom att använda till exempel $(p-q)$-formeln får vi fram att x^2-2x-1 har nollställen $x = 1 \pm \sqrt{2}$. Samtliga nollställen är alltså $x = \pm i\sqrt{6},\ 1 \pm \sqrt{2}$. $\square$

8. Bestäm ett reellt tal a sådant att ekvationen $2x^3-(4+3i)x^2-(4-6i)x+ai=0$ har en nollskild imaginär rot. Lös sedan ekvationen fullständigt. (5 poäng)

Lösning. Vi ansätter ett nollställe $x = ib$. Insättning ger då att

$$\begin{aligned}
2(ib)^3-(4+3i)(ib)^2-(4-6i)(ib)+ai &= -2ib^3+(4+3i)b^2-(4-6i)ib+ai \\
&= -2ib^3+4b^2+3ib^2-4ib-6b+ai \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

Genom att samla ihop realdelen och imaginärdelen och sätta båda till 0 får vi ekvationerna

$$\begin{aligned}
4b^2-6b&=0 && \text{(realdel)}\,,\\
-2b^3+3b^2-4b+a&=0 && \text{(imaginärdel)}\,.
\end{aligned}$$

Ekvationen för realdelen ger oss

$$4b^2-6b=2b(2b-3)=0$$

och vi ser att denna ekvation har lösningarna $b=0$ och $b=\frac{3}{2}$. Eftersom vi vet att den imaginära roten ska vara nollskild förkastar vi direkt lösningen $b=0$. Vi sätter därför in $b=\frac{3}{2}$ i ekvationen för imaginärdelen:

$$\begin{aligned}
-2\left(\frac{3}{2}\right)^3+3\left(\frac{3}{2}\right)^2-4\frac{3}{2}+a &= -2\frac{27}{8}+3\frac{9}{4}-6+a \\
&= -\frac{27}{4}+\frac{27}{4}-6+a \\
&= a-6 \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

Vi måste alltså ha $a=6$. För att lösa ekvationen fullständigt delar vi därför $2x^3-(4+3i)x^2-(4-6i)x+6i$ med $x-\frac{3}{2}i$.

$$
\begin{array}{rl}
& 2x^2 - 4x - 4 \\
\hline
2x^3 - (4+3i)x^2 - (4-6i)x + 6i & \big| \; x - \frac{3}{2}i \\
-(2x^3 - 3ix^2) & \\
\hline
-4x^2 - (4-6i)x + 6i & \\
-(-4x^2 + 6ix) & \\
\hline
-4x + 6i & \\
-(-4x + 6i) & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Vi ser alltså att

$$2x^3 - (4+3i)x^2 - (4-6i)x + 6i = \left(x - \frac{3}{2}i\right)\left(2x^2 - 4x - 4\right).$$

Polynomet $2x^2-4x-4$ har enligt $(p-q)$-formeln nollställen $x = 1\pm\sqrt{3}$. Lösningarna till den ursprungliga ekvationen ges alltså av $x = \frac{3}{2}i$, $1 \pm \sqrt{3}$. □