UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Dan Strängberg

Tentamen i matematik
Algebra 1
2017-04-18

Skrivtid: 5 timmar. Tillåtna hjälpmedel: endast skrivdon. Varje uppgift ger högst 5 poäng. För betygen 3, 4 och 5 krävs minst 18, 25, resp. 32 poäng, inklusive ev. bonuspoäng. Lösningarna skall åtföljas av förklarande text. För full poäng krävs att du noggrannt motiverar varje steg i ditt resonemang. Påbörja varje uppgift på ett nytt blad. Börja med att läsa igenom hela tentan så att du kan ställa eventuella frågor under lärarbesöket. Lycka till!

1. (a) Låt A, B vara två utsagor. Visa att utsagan $(A \wedge \neg B) \wedge (B \vee \neg A)$ alltid är falsk. (3 poäng)

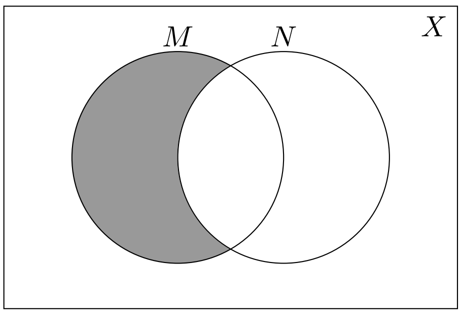
   (b) Låt M, N vara två mängder i ett universum X. Rita Venndiagram för mängderna $M \cap N^c$ och $N \cup M^c$. (2 poäng)

Lösning. (a) Låt P vara utsagan $(A \wedge \neg B) \wedge (B \vee \neg A)$. Vi ställer upp en sanningsvärdestabell:

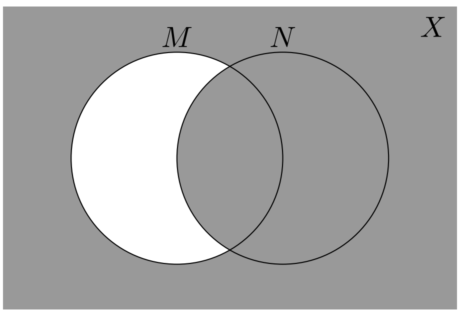
A	B	$A \wedge \neg B$	$B \vee \neg A$	P
S	S	F	S	F
S	F	S	F	F
F	S	F	S	F
F	F	F	S	F

Vi ser från sanningsvärdestabellen att P alltid är falsk.

(b)



(a) Venndiagram för $M \cap N^c$.



(b) Venndiagram för $N \cup M^c$.

$\square$

2. Välj ett heltal c sådant att den Diofantiska ekvationen $195x + 84y = c$ har lösningar

och lös ekvationen fullständigt för ditt val av c. Glöm inte att motivera ditt val av c. (5 poäng)

Lösning. För att den Diofantiska ekvationen ska ha lösningar måste SGD(195, 84) dela c. Vi börjar därför med att beräkna SGD(195, 84) med hjälp av Euklides algoritm.

$$\begin{aligned} 195 &= 2 \cdot 84 + 27 \\ 84 &= 3 \cdot 27 + 3 \\ 27 &= 9 \cdot 3 \end{aligned}$$

Eftersom den sista nollskilda resten är 3 så är SGD(195, 84) = 3. Vi kan därför välja $c = 3$. Med detta c får vi

$$195x + 84y = 3 \iff 65x + 28y = 1\,.$$

Genom att gå igenom Euklides algoritm baklänges får vi också

$$\begin{aligned} 3 &= 84 - 3 \cdot 27 \\ &= 84 - 3 \cdot (195 - 2 \cdot 84) \\ &= 7 \cdot 84 - 3 \cdot 195 \\ &= 195 \cdot (-3) + 84 \cdot 7 \end{aligned}$$

så vi ser att $x = -3$ och $y = 7$ ger en lösning. Den allmänna lösningen ges därför av $x = -3 - 28n$ och $y = 7 + 65n$ där n är ett heltal. □

3. (a) Skriv talet 517 i bas 3. (2 poäng)
   (b) Bestäm resten som fås då 13^{282} delas med 5. (3 poäng)

Bevis. Lösning

(a) Eftersom $3^5 = 243$ och $3^3 = 27$ kan vi skriva

$$\begin{aligned} 517 &= 2 \cdot 3^5 + 31 \\ &= 2 \cdot 3^5 + 3^3 + 4 \\ &= 2 \cdot 3^5 + 3^3 + 3 + 1 \end{aligned}$$

och vi får då att $517 = (201011)_3$.

(b) Resten som erhålls är det tal n sådant att $0 \le n < 5$ och $13^{282} \equiv n \mod 5$. Vi använder därför kongruensräkning:

$$\begin{aligned}
13^{282} &\equiv_5 3^{282} \\
&\equiv_5 (3^2)^{141} \\
&\equiv_5 9^{141} \\
&\equiv_5 4^{141} \\
&\equiv_5 (-1)^{141} \\
&\equiv_5 -1 \\
&\equiv_5 4
\end{aligned}$$

så resten är 4.

$\square$

4. Visa med induktion att $5 \mid (7^n - 2^n)$ för alla naturliga tal $n \ge 1$. (5 poäng)

Lösning. **Basfall** För $n = 1$ får vi $7^1 - 2^1 = 5$ och eftersom $5 \mid 5$ stämmer utsagan.

Induktionsantagande Antag att $5 \mid (7^p - 2^p)$ för något naturligt tal p.

Induktionssteg Induktionsantagandet $5 \mid (7^p - 2^p)$ är ekvivalent med $7^p \equiv 2^p \mod 5$. Med kongruensräkning får vi då

$$\begin{aligned}
7^{p+1} &\equiv_5 7 \cdot 7^p \\
&\equiv_5 7 \cdot 2^p \\
&\equiv_5 2 \cdot 2^p \\
&\equiv_5 2^{p+1}
\end{aligned}$$

enligt induktionsantagandet. Eftersom $7^{p+1} \equiv_5 2^{p+1} \iff 5 \,\Big|\, (7^{p+1} - 2^{p+1})$ har vi bevisat att $5 \,\Big|\, (7^{p+1} - 2^{p+1})$.

Enligt induktionsprincipen gäller därför $5 \mid 7^n - 2^n$ för alla naturliga tal $n \ge 0$. $\square$

5. Relation R på heltalen ges av $a\,R\,b \iff ab \equiv 0 \mod 7$. Avgör, med bevis eller motexempel, vilka av egenskaperna reflexiv, symmetrisk och transitiv som R uppfyller. (5 poäng)

Lösning. **Reflexiv** Vi har att $1 \cdot 1 = 1 \not\equiv 0 \mod 7$ så R är inte reflexiv.

Symmetrisk Eftersom $ab = ba$ måste $ab \equiv 0 \mod 7 \iff ba \equiv 0 \mod 7$ så $a\,R\,b \iff b\,R\,a$ vilket betyder att R är symmetrisk.

Transitiv Ett motexempel ges av att $1 \ R \ 7$ och $7 \ R \ 2$ men inte $1 \ R \ 2$ eftersom $1 \cdot 7 = 7 \equiv 0 \mod 7$ och $7 \cdot 2 = 14 \equiv 0 \mod 7$ men $1 \cdot 2 = 2 \not\equiv 0 \mod 7$ så R är inte transitiv.

□

6. Låt N, M vara mängderna $N = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ och $M = \{1, 2, 3, \ldots, m\}$ där $n < m$ är två naturliga tal.

   (a) Konstruera en injektion $f \colon N \to M$ eller $f \colon M \to N$. (2 poäng)

   (b) Konstruera en surjektion $g \colon N \to M$ eller $g \colon M \to N$. (2 poäng)

   (c) Vad kan vi säga om hur kardinaliteterna för N och M förhåller sig till varandra utifrån del (a) och (b)? (1 poäng)

Lösning. (a) Eftersom $n < m$ kan vi konstruera funktionen $f \colon N \to M$ som ges av $f(k) = k$ för alla k sådana att $1 \le k \le n$. Detta är en injektion eftersom för $k_1 \ne k_2$ får vi $f(k_1) = k_1 \ne k_2 = f(k_2)$.

(b) Vi kan konstruera funktionen $g \colon M \to N$ som ges av

$$g(k) = \begin{cases} k & 1 \le k \le n, \\ 1 & n < k \le m. \end{cases}$$

För $l \in N$ har vi $1 \le l \le n$ så $l = g(l)$, alltså är g en surjektion.

(c) Eftersom det finns en injektion $f \colon N \to M$ kan vi säga att $N \le_c M$. Surjektionen $g \colon M \to N$ ger oss också att $N \le_c M$.

□

7. Polynomet $p(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 - 4x + 2$ har ett nollställe $x = -1 + i$. Hitta samtliga nollställen till p. (5 poäng)

Bevis. Enligt faktorsatsen är polynomet p delbart med $(x - (-1 + i))$. Eftersom polynomet har reella koefficienter är det också delbart med $(x - (-1 - i))$ och därför med $(x - (-1 + i))(x - (-1 - i)) = x^2 + 2x + 2$. Om vi utför divisionen får vi

$$
\begin{array}{l|l}
\multicolumn{1}{l}{\quad x^2 - 3x + 1} & \\
\hline
\quad x^4 - x^3 - 3x^2 - 4x + 2 & x^2 + 2x + 2 \\
\cline{2-2}
-(x^4 + 2x^3 + 2x^2) & \\
\cline{1-1}
\qquad -3x^3 - 5x^2 - 4x + 2 & \\
\quad -(3x^3 - 6x^2 - 6x) & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad x^2 + 2x + 2 & \\
\qquad\quad -(x^2 + 2x + 2) & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

Vi ser att $p(x) = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 3x + 1)$. Polynomet $x^2 - 3x + 1$ har nollställen

$$x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

enligt p-q-formeln. Polynomet p har alltså nollställen $x = -1 \pm i$ och $x = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$. $\square$

8. Låt r vara polynomet som ges av $r(x) = x^4 + x^3 + 8x^2 + 7x + 2$.

   (a) Visa att ett reellt tal $x \geq 0$ inte kan vara ett nollställe till r. (2 poäng)

   (b) Visa att r inte har några rationella nollställen. (3 poäng)

Lösning. (a) Om $x \geq 0$ får vi $x^4 \geq 0$, $x^3 \geq 0$, $8x^2 \geq 0$ och $7x \geq 0$, så

$$\begin{aligned} r(x) &= x^4 + x^3 + 8x^2 + 7x + 2 \\ &\geq 0 + 0 + 0 + 0 + 2 \\ &\geq 2\,. \end{aligned}$$

Vi får $r(x) \geq 2$ så x kan inte vara ett nollställe till r.

(b) Eftersom r endast har heltalskoefficienter måste ett rationellt nollställe $\frac{p}{q}$ uppfylla $q\,|\,1$ och $p\,|\,2$ så de enda möjliga rationella nollställena är $x = \pm 1$ och $x = \pm 2$. Från del (a) kan vi utesluta $x = 1$ och $x = 2$. Kvar återstår att kolla om $x = -1$ eller $x = -2$ är nollställen. Vi får

$$\begin{aligned} r(-1) &= (-1)^4 + (-1)^3 + 8(-1)^2 + 7(-1) + 2 \\ &= 1 - 1 + 8 - 7 + 2 \\ &= 3 \\ r(-2) &= (-2)^4 + (-2)^3 + 8(-2)^2 + 7(-2) + 2 \\ &= 16 - 8 + 32 - 14 + 2 \\ &= 28 \end{aligned}$$

Vi kan alltså utesluta alla möjliga rationella nollställen så r har inga rationella nollställen.

$\square$