UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Dan Lilja

Tentamen i matematik
Algebra I
2018-01-08

Skrivtid: 5 timmar. Tillåtna hjälpmedel: endast skrivdon. Varje uppgift ger högst 5 poäng. För betygen 3, 4 och 5 krävs minst 18, 25, resp. 32 poäng, inklusive ev. bonuspoäng. Lösningarna skall åtföljas av förklarande text. För full poäng krävs att du noggrannt motiverar varje steg i ditt resonemang. Påbörja varje uppgift på ett nytt blad. Lycka till!

1. (a) Låt A och B vara utsagor. Gör sanningsvärdestabell för utsagorna $A \wedge B$, $\neg A \vee B$ och $A \Leftrightarrow B$ (3 poäng)

   (b) Låt M och N vara mängder i ett universum X. Rita Venndiagram för mängderna $M \cup N$ och $N \smallsetminus M$. (2 poäng)

2. Lös den Diofantiska ekvationen $798x + 585y = 9$. (5 poäng)

3. (a) Skriv talet $(713)_{10}$ i bas 8. (2 poäng)

   (b) Finn resten som fås då $4^{791} + 31$ delas med 13. (3 poäng)

4. Visa med induktion att
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$
för alla naturliga tal $n \geq 1$. (5 poäng)

5. Låt M, N vara mängder, $f\colon M \to N$ en funktion och definiera relationen R på M genom $xRy \Leftrightarrow f(x) = f(y)$, d.v.s. två element $x, y \in M$ står i relation till varandra om f avbildar båda på ett och samma värde. Visa att R är en ekvivalensrelation. (5 poäng)

6. Låt M vara mängden av alla komplexa tal $z = a + bi$ där $a, b \in \mathbb{Z}$. Visa att mängden M är uppräknelig. (5 poäng)

7. Polynomet $3x^3 + 7x^2 + 11x + 3$ har ett rationellt nollställe. Hitta samtliga nollställen. (5 poäng)

8. Låt polynomet f ges av $f(x) = (x-3)^4(x^2+2)(x-i)$.

(a) Vilka nollställen har f och vilka är deras multipliciteter? (2 poäng)

(b) Vilka nollställen har f och f' gemensamt och vilken multiplicitet har dessa i f'? (2 poäng)

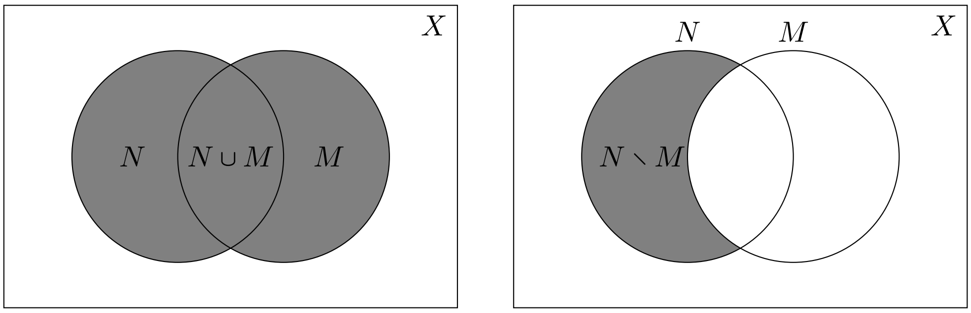
(c) Ange en SGD för f och f'. (1 poäng)

Lösnignsförslag

1. (a)

A	B	$A \wedge B$	$\neg A \vee B$	$A \Leftrightarrow B$
S	S	S	S	S
S	F	F	F	F
F	S	F	S	F
F	F	F	S	S

   (b)



(a) Venndiagram för $M \cup N$. (b) Venndiagram för $N \setminus M$.

2. Vi använder Euklides algoritm för att hitta SGD$(798, 585)$:

$$
\begin{aligned}
798 &= 1 \cdot 585 + 213 \\
585 &= 2 \cdot 213 + 159 \\
213 &= 1 \cdot 159 + 54 \\
159 &= 2 \cdot 54 + 51 \\
54 &= 51 + 3 \\
51 &= 17 \cdot 3
\end{aligned}
$$

   Vi ser alltså att SGD$(798, 585) = 3$ så ekvationen har lösningar. Vi förkortar nu ekvationen med 3 och får då $266x + 195y = 3$. Genom att följa Euklides algoritm baklänges får vi ut en lösning:

$$
\begin{aligned}
3 &= 54 - 51 \\
&= 54 - (159 - 2\cdot 54) \\
&= 3\cdot 54 - 159 \\
&= 3(213 - 159) - 159 \\
&= 3\cdot 213 - 4\cdot 159 \\
&= 3\cdot 213 - 4\cdot(585 - 2\cdot 213) \\
&= 11\cdot 213 - 4\cdot 585 \\
&= 11\cdot(798 - 585) - 4\cdot 585 \\
&= 11\cdot 798 - 15\cdot 585 \\
&= 798\cdot 11 + 585\cdot(-15) \\
\Leftrightarrow\quad 1 &= 266\cdot 11 + 195\cdot(-15)
\end{aligned}
$$

Vi ser alltså att $x_0 = 11$ och $y_0 = -15$ löser hjälpekvationen $266x + 195y = 1$. Den fullständiga lösningen till den Diofantiska ekvartionen ges därför av $x = 33 - 195n$ och $y = -45 + 266n$ för $n \in \mathbb{Z}$.

3. (a) Vi börjar med att se att $713 = 89\cdot 8+1 = (11\cdot 8+1)\cdot 8+1 = ((1\cdot 8+3)\cdot 8+1)\cdot 8+1$ så $(713)_{10} = (1311)_8$. Alternativt kan vi se att $8^2 = 64$, $8^3 = 512$ och $8^4 > 713$, så vi kan skriva följande:

$$
\begin{aligned}
713 &= 1\cdot 8^3 + 201 \\
201 &= 3\cdot 8^2 + 9 \\
9 &= 1\cdot 8^1 + 1 \\
1 &= 1\cdot 8^0
\end{aligned}
$$

Vi får därför att $713 = 1\cdot 8^3+3\cdot 8^2+1\cdot 8^1+1\cdot 8^0$ och vi ser då att $(713)_{10} = (1311)_8$.

(b) Vi observerar först att $31 \equiv 5 \mod 13$. Vi undersöker nu potenser av 4 modulo 13:

$$
\begin{aligned}
4^2 &= 16 \equiv 3 \mod 13 \\
4^3 &= 4\cdot 4^2 \equiv 4\cdot 3 \equiv -1 \mod 13
\end{aligned}
$$

Vi kan alltså använda att $4^3 \equiv -1 \mod 13$ för att förenkla uttrycket:

$$
\begin{aligned}
4^{791} &= 4^{3\cdot 263+2} \\
&= 4^2\cdot(4^3)^{263} \\
&\equiv 3\cdot(-1)^{263} \mod 13 \\
&\equiv -3 \mod 13 \\
&\equiv 10 \mod 13\,.
\end{aligned}
$$

Med detta får vi att $4^{791} + 31 \equiv 10 + 5 \equiv 2 \mod 13$.

4. Låt $VL_n = \sum_{k=1}^{n} k^3$ och $HL_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. Vi vill då visa att $VL_n = HL_n$ för alla heltal $n \geq 1$.

   Basfall: För $n = 1$ har vi $VL_1 = \sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = 1$ och $HL_1 = \frac{1^2 \cdot 2^2}{4} = 1$ så $VL_1 = HL_1$.

   Induktionsantagande: Antag att $VL_p = HL_p$ för något heltal $p \geq 1$.

   Induktionssteg: För $n = p + 1$ har vi

$$\begin{aligned} VL_{p+1} &= \sum_{k=1}^{p+1} k^3 \\ &= \sum_{k+1}^{p} k^3 + (p+1)^3 \\ &\overset{\text{IA}}{=} \frac{p^2(p+1)^2}{4} + (p+1)^3 \\ &= \frac{p^2(p+1)^2 + 4(p+1)^3}{4} \\ &= \frac{(p+1)^2(p^2+4p+4)}{4} \\ &= \frac{(p+1)^2(p+2)^2}{4} \\ &= HL_{p+1}\,. \end{aligned}$$

   Vi ser att om $VL_p = HL_p$ så är även $VL_{p+1} = HL_{p+1}$ och vi vet att $VL_1 = HL_1$ så enligt induktionsprincipen gäller därför $VL_n = HL_n$ för alla heltal $n \geq 1$.

5. Vi behöver visa att relationen är reflexiv, symmetrisk och transitiv.

   Reflexiv: Vi behöver visa att mRm gäller för alla $m \in M$. Enligt definitionen av R har vi att $mRm \iff f(m) = f(m)$ och eftersom $f(m) = f(m)$ gäller för alla $m \in M$ så gäller alltså mRm för alla $m \in M$ så relationen R är reflexiv.

   Symmetrisk: Vi behöver visa att om m_1Rm_2 gäller så gäller även m_2Rm_1. Enligt definitionen av R har vi $m_1Rm_2 \iff f(m_1) = f(m_2) \iff f(m_2) = f(m_1) \iff m_2Rm_1$ så relationen R är symmetrisk.

   Transitiv: Vi vill visa att om m_1Rm_2 och m_2Rm_3 gäller så gäller även m_1Rm_3. Enligt definitionen av R har vi $m_1Rm_2 \iff f(m_1) = f(m_2)$ och $m_2Rm_3 \iff f(m_2) = f(m_3)$ så om $f(m_1) = f(m_2)$ och $f(m_2) = f(m_3)$ så har vi $f(m_1) = f(m_2) = f(m_3) \implies m_1Rm_3$ så relationen R är transitiv.

Relationen är alltså reflexiv, symmetrisk och transitiv och är därför en ekvivalensrelation.

6. Vi kan hitta en bijektion från mängden $f\colon M \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ genom $f(a + bi) = (a, b)$ så $M =_c \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Vi vet också att $\mathbb{Z} =_c \mathbb{N}$ så $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} =_c \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ och därför $M =_c \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Vi behöver nu visa att $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \leq_c \mathbb{N}$. Låt funktionen $g\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ges av $g(n, m) = 2^n 3^m$. Då är g injektiv eftersom $g(n, m) = g(l, k) \iff 2^n 3^m = 2^l 3^k$ och enligt aritmetikens fundamentalsats har vi då $n = l$ och $m = k$, så $(n, m) = (l, k)$. Från detta får vi nu $M =_c \mathbb{N} \times \mathbb{N} \leq_c \mathbb{N}$ så M är uppräknelig.

7. Eftersom polynomet $f(x) = 3x^3 + 7x^2 + 11x + 3$ endast har heltalskoefficienter måste ett eventuellt rationellt nollställe $x = \frac{p}{q}$ med $\mathrm{SGD}(p, q) = 1$ uppfylla $q \mid 3$ och $p \mid 3$. De möjliga rationella nollställena blir då $x = \pm 1, \pm 3, \pm \frac{1}{3}$. Genom att testa oss fram ser vi att $x = -\frac{1}{3}$ är ett nollställe och vi kan därför faktorisera ut $3x + 1$ ur f. Vi gör detta med polynomdivision:

$$
\begin{array}{rl}
 & x^2 + 2x + 3 \\ \hline
3x^3 + 7x^2 + 11x + 3 & \big|\, 3x + 1 \\
-(3x^3 + x^2) & \\ \hline
6x^2 + 11x + 3 & \\
-(6x^2 + 2x) & \\ \hline
9x + 3 & \\
-(9x + 3) & \\ \hline
0 &
\end{array}
$$

Vi ser alltså att $f(x) = (x^2 + 2x + 3)(3x + 1)$. Vi hittar nollställena till $x^2 + 2x + 3$ med p-q-formeln och får nollställena $x = -1 \pm i\sqrt{2}$. Polynomet f har alltså nollställen $x = -\frac{1}{3}, -1 \pm i\sqrt{2}$.

8. (a) Polynomet f har nollställen $x = 3, \pm i\sqrt{2}, i$. Nollstället $x = 3$ har multiplicitet 4, övriga nollställen har multiplicitet 1.
   (b) Enligt satsen om multipla nollställen är det enda gemensamma nollstället för f och f' nollstället $x = 3$ eftersom det är det enda nolstället av multiplicitet minst 2 och det är ett nollställe av multiplicitet 3 i f' eftersom det har multiplicitet 4 i f.
   (c) En SGD för f och f' ges av polynomet $(x - 3)^3$.