UPPSALA UNIVERSITET | Tentamen i matematik
MATEMATISKA INSTITUTIONEN | ALGEBRA I
DAN LILJA | 2018-06-12

Skrivtid: 5 timmar. Tillåtna hjälpmedel: endast skrivdon. Varje uppgift ger högst 5 poäng. För betygen 3, 4 och 5 krävs minst 18, 25, resp. 32 poängoäng. Lösningarna skall åtföljas av förklarande text. För full poäng krävs att du noggrant motiverar varje steg i ditt resonemang. Påbörja varje uppgift på ett nytt blad. Lycka till!

1. Låt A, B och C vara utsagor. Konstruera en utsaga med hjälp av utsagorna A, B och C som har samma sanningsvärden som utsagan P i nedanstående sanningsvärdestabell och bevisa att de har samma sanningsvärden. (5 poäng)

A	B	C	P
T	T	T	T
T	T	F	F
T	F	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	T
F	F	T	T
F	F	F	F

Lösning. Vi observerar först att utsagan P alltid är sann när C är sann. Vi kan därför gissa att $P \Leftrightarrow Q \vee C$ för någon utsaga Q. Om vi begränsar oss till de fall då C är falsk och P är sann ser vi att detta endast händer då A är falsk och B är sann. Vi gissar därför att $Q \Leftrightarrow \neg A \wedge B$. Vi konstrollerar att utsagan $(\neg A \wedge B) \vee C$ har samma sanningsvärden som P med en till sanningsvärdestabell.

A	B	C	P	$(\neg A \wedge B) \vee C$
T	T	T	T	T
T	T	F	F	F
T	F	T	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	T	F	T	T
F	F	T	T	T
F	F	F	F	F

$\square$

2. Lös den Diofantiska ekvationen $756x - 260y = 8$. (5 poäng)

Lösning. Vi använder oss först av Euklides algoritm för att hitta SGD$(756, 260)$:

$$\begin{aligned}
756 &= 2 \cdot 260 + 236 \\
260 &= 236 + 24 \\
236 &= 9 \cdot 24 + 20 \\
24 &= 20 + 4 \\
20 &= 5 \cdot 4
\end{aligned}$$

Vi ser alltså att SGD$(756, 260) = 4$. Vi gör nu Euklides algoritm baklänges för att hitta ett par av x och y sådana att $756x - 260y = 4$.

$$\begin{aligned}
4 &= 24 - 20 \\
&= 24 - (236 - 9 \cdot 24) \\
&= 10 \cdot 24 - 236 \\
&= 10 \cdot (260 - 236) - 236 \\
&= 10 \cdot 260 - 11 \cdot 236 \\
&= 10 \cdot 260 - 11 \cdot (756 - 2 \cdot 260) \\
&= 32 \cdot 260 - 11 \cdot 756 \\
&= 756 \cdot (-11) - 260 \cdot (-32)
\end{aligned}$$

Vi ser alltså att $x = -11$ och $y = -32$ är en lösning till $756x - 260y = 4$. En lösning till den ursprungliga ekvationen $756x - 260y = 8$ ges därför av $x = 2 \cdot (-11) = -22$ och $y = 2 \cdot (-32) = -64$. För att hitta den allmänna lösningen behöver vi förkorta ekvationen. Vi kan se att $756 = 2 \cdot 378 = 4 \cdot 189$ och $260 = 2 \cdot 130 = 4 \cdot 65$. Den förkortade ekvationen är därför $189x - 65 = 2$ och den allmänna lösningen ges därför av $x = -22 + 65$ och $y = -64 + 189n$ där $n \in \mathbb{Z}$. □

3. (a) Talet $3B80EF$ är ett hexadecimalt tal, d.v.s. skrivet i bas 16 där $A = 10$, $B = 11$, $C = 12$, $D = 13$, $E = 14$ och $F = 15$. Skriv talet i bas 10. Som hjälp kan du använda att $16^2 = 256$, $16^3 = 4096$, $16^4 = 65536$ och $16^5 = 1048576$. (4 poäng)

Lösning.

$$\begin{aligned}
(3B80EF)_{16} &= 3 \cdot 16^5 + 11 \cdot 16^4 + 8 \cdot 16^3 + 14 \cdot 16^1 + 15 \cdot 16^0 \\
&= 3 \cdot 1048576 + 11 \cdot 65536 + 8 \cdot 4096 + 14 \cdot 16 + 15 \\
&= 3145728 + 720896 + 32768 + 224 + 15 \\
&= 3899631
\end{aligned}$$

så $(3B80EF)_{16} = (3899631)_{10}$. □

(b) Ett vanligt sätt att ange färger i en dator är som tre stycken tvåsiffriga hexadecimala tal. De tre talen anger hur mycket rött, grönt och blått som ingår i färgen, i den ordningen. Ju större tal desto mer av den färgen ingår. Talet ovan beskriver en färg genom att dela upp det som de tre talen $3B$, 80 och EF där $3B$ anger hur mycket rött som ingår, 80 anger hur mycket grönt som ingår och EF anger hur mycket blått som ingår. Vilken färg är starkast? (1 poäng)

Lösning. Frågan är alltså vilket av talen $(3B)_{16}$, $(80)_{16}$ och $(EF)_{16}$ som är störst. För detta räcker det att titta på de mest signifikanta siffrorna, här 3, 8 och E respektive.[1] Eftersom E är störst av dessa betyder det också att $(EF)_{16}$ är störst. Det finns alltså mest blått i färgen. □

4. Visa med induktion att talet $3^{2n+1} + 5^{2n}$ är delbart med 4 men inte med 8 för alla heltal $n \geq 0$. (5 poäng)

Lösning. **Basfall:** För $n = 0$ har vi $3^{2n+1} + 5^{2n} = 3^1 + 5^0 = 3 + 1 = 4$. Eftersom $4 \mid 4$ men $8 \nmid 4$ så stämmer basfallet.

Induktionsantagande: Antag att 4 delar $3^{2p+1} + 5^{2p}$ men att 8 inte delar $3^{2p+1} + 5^{2p}$ för något heltal $p \geq 0$.

Induktionssteg: För $n = p + 1$ har vi

$$\begin{aligned} 3^{2n+1} + 5^{2n} &= 3^{2(p+1)+1} + 5^{2(p+1)} \\ &= 3^{2p+3} + 5^{2p+2} \\ &= 3^2 \cdot 3^{2p+1} + 5^2 \cdot 5^{2p} \\ &= 9 \cdot 3^{2p+1} + 25 \cdot 5^{2p}. \end{aligned}$$

Vi använder nu kongruenser modulo 4 respektive 8 för att avgöra om 4 eller 8 delar detta tal.

$$\begin{aligned} 9 \cdot 3^{2p+1} + 25 \cdot 5^{2p} &\equiv 1 \cdot 3^{2p+1} + 1 \cdot 5^{2p} \pmod 4 \\ &\equiv 3^{2p+1} + 5^{2p} \pmod 4 \\ &\equiv 0 \pmod 4 \end{aligned}$$

där den sista kongruensen följer från vårt induktionsantagande.

$$\begin{aligned} 9 \cdot 3^{2p+1} + 25 \cdot 5^{2p} &\equiv 1 \cdot 3^{2p+1} + 1 \cdot 5^{2p} \pmod 8 \\ &\equiv 3^{2p+1} + 5^{2p} \pmod 8 \\ &\not\equiv 0 \pmod 8 \end{aligned}$$

[1] Jämför med om vi skulle avgöra vilket av talen 28, 56 och 91 som är störst i bas 10.

där återigen den sista kongruensen följer av vårt induktionsantagande. Vi ser alltså att även för $n = p + 1$ gäller att $3^{2n+1} + 5^{2n}$ är delbart med 4 men inte med 8.

Enligt induktionsprincipen följer det nu att $3^{2n+1} + 5^{2n}$ är delbart med 4 men inte med 8 för alla heltal $n \geq 0$. □

5. Låt relationen R på mängden $\mathbb{C}$ ges av $z\ R\ w \iff |z| = |w|$. Visa att R är en ekvivalensrelation och beskriv en av dess ekvivalensklasser. (5 poäng)

Lösning. **Reflexivitet:** Vi måste visa att för varje komplext tal z gäller $z\ R\ z$. Eftersom $z\ R\ z \iff |z| = |z|$ och $|z| = |z|$ är sant för alla $z \in \mathbb{C}$ så är därför $z\ R\ z$ sant för alla $z \in \mathbb{C}$ och relationen är därför reflexiv.

Symmetri: Vi måste visa att om $z\ R\ w$ är sant så är även $w\ R\ z$ sant. Eftersom $|z| = |w| \Rightarrow |w| = |z|$ så gäller även $z\ R\ w \Rightarrow w\ R\ z$ och därför är relationen R symmetrisk.

Transitivitet: Vi måste visa att $z\ R\ w$ och $w\ R\ v$ tillsammans implicerar att $z\ R\ v$. Så låt $|z| = |w|$ och $|w| = |v|$ för tre komplexa tal z, w, v. Då följer att $|z| = |w| = |v|$ så $|z| = |v|$ och därför gäller att $z\ R\ w \wedge w\ R\ v \Rightarrow z\ R\ v$ och därför är relationen transitiv.

Eftersom relationen är reflexiv, symmetrisk och transitiv så är den en ekvivalensrelation. Betrakta nu talet 1. Vad är dess ekvivalensklass under relationen R? Eftersom $|z|$ för ett komplext tal z ger dess avstånd från origo så kan vi tolka $z\ R\ w$ som att z och w har samma avstånd till origo, d.v.s. de ligger på samma cirkel kring origo. Ekvivalensklassen för talet 1 är alltså alal komplexa tal med avstånd $|1| = 1$ till origo, d.v.s. cirkeln med radie 1 kring origo. □

6. Låt M vara mängden av alla oändliga följder av nollor och ettor, d.v.s. $M = \{(a_0, a_1, a_2, \dots) \colon a_i = 0, 1 \quad \forall i \geq 0\}$. Visa att mängden M är överuppräknelig. Tips: Antag att M istället är uppräknelig. Hur kan vi då hitta en motsägelse? (5 poäng)

Lösning. Antag att mängden är uppräknelig. Då finns det en bijektion $f \colon \mathbb{N} \to M$. Vi kan då räkna upp alla oändliga följder av ettor och nollor på följande vis:

$$\begin{aligned} f(0) &= A_0 = (a_{0,0}, a_{0,1}, a_{0,2}, \dots) \\ f(1) &= A_1 = (a_{1,0}, a_{1,1}, a_{1,2}, \dots) \\ f(2) &= A_2 = (a_{2,0}, a_{2,1}, a_{2,2}, \dots) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Låt oss nu skapa en oändlig följd av ettor och nollor $B = (b_0, b_1, b_2, \dots)$ enligt följande regel:

$$b_i = \begin{cases} 1 & \text{om } a_{i,i} = 0 \\ 0 & \text{om } a_{i,i} = 1\,. \end{cases}$$

Detta B kan inte vara något av våra tidigare A_k eftersom $b_0 \neq a_{0,0}$ så $B \neq A_0$, $b_1 \neq a_{1,1}$ så $B \neq A_1$, $b_2 \neq a_{2,2}$ så $B \neq A_2$, o.s.v. För varje k gäller $b_k \neq a_{k,k}$ så $B \neq A_k$. Eftersom B inte är något av våra A_k kan B inte vara något $f(k)$ eftersom dessa var precis A_k. Alltså kan inte f vara surjektiv. Detta motsäger antagandet att f var en bijektion. Därför kan det inte finnas någon bijektion och därför kan inte M vara uppräknelig. Då måste M vara överuppräknelig. □

7. Polynomet $f(x) = x^4 + (-4+i)x^3 + (7-4i)x^2 + (-8+5i)x + 10$ har minst ett nollställe på formen $x = bi$ där b är något reellt tal. Hitta samtliga nollställen till f. (5 poäng)

Lösning. Vi ansätter ett nollställe $x = bi$:

$$\begin{aligned} 0 &= f(bi) \\ &= (bi)^4 + (-4+i)(bi)^3 + (7-4i)x^2 + (-8+5i)bi + 10 \\ &= b^4 - (-4+i)b^3 i - (7-4i)b^2 + (-8+5i)bi + 10 \\ &= b^4 + b^3 - 7b^2 - 5b + 10 + (4b^3 + 4b^2 - 8b)i\,. \end{aligned}$$

Vi kan dela upp detta i realdel och imaginärdel och får då

$$\begin{aligned} 0 &= b^4 + b^3 - 7b^2 - 5b + 10\,, \\ 0 &= 4b^3 + 4b^2 - 8b \\ &= 4b(b^2 + b - 2)\,. \end{aligned}$$

Den andra ekvationen har lösningar $b = 0, 1, -2$. Lösningen $b = 0$ kan inte lösa den övre ekvationen så vi förkastar den. Lösningarna $b = 1, -2$ löser även den övre ekvationen och därför är $x = i, -2i$ två nollställen till polynomet $f(x)$. Enligt faktorsatsen kan därför $f(x)$ delas med polynomet $(x-i)(x+2i) = x^2 + ix + 2$:

$$\begin{array}{rl} x^2 - 4x + 5 & \\ \hline x^4 + (-4+i)x^3 + (7-4i)x^2 + (-8+5i)x + 10 & \big|\; x^2 + ix + 2 \\ -(x^4 + ix^3 + 2x^2) & \\ \hline -4x^3 + (5-4i)x^2 + (-8+5i)x + 10 & \\ -(-4x^3 - 4ix^2 - 8x) & \\ \hline 5x^2 + 5ix + 10 & \\ -(5x^2 + 5ix + 10) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Vi ser alltså att $f(x) = (x^2 + ix + 2)(x^2 - 4x + 5)$. Enligt p-q-formeln har polynomet $x^2 - 4x + 5$ nollställen $x = 2 \pm \sqrt{4-5} = 2 \pm i$. Nollställena till f är alltså $x = i, -2i, 2 \pm i$. $\square$

8. Ange för vart och ett av följande påståenden om det är sant eller falskt. Endast svar krävs.

   (a) Varje polynom med heltalskoefficienter har rationella nollställen. (1 poäng)

   Svar. Falskt. Betrakta till exempel polynomet $x^2 + 1$ som har nollställen $x = \pm i$. $\square$

   (b) Varje polynom av grad minst 1 kan skrivas som en produkt av polynom av grad 1. (1 poäng)

   Svar. Sant. Detta är en följd av algebrans fundamentalsats. $\square$

   (c) Om ett reellt polynom har ett nollställe $a + bi$ där $a, b \in \mathbb{R}$ så är även $a - bi$ ett nollställe till polynomet. (1 poäng)

   Svar. Sant. Komplexa rötter till reella polynom kommer alltid i konjugerade par. $\square$

   (d) Varje reellt polynom av grad minst 1 har ett reellt nollställen. (1 poäng)

   Svar. Falskt. Betrakta återigen polynomet $x^2 + 1$ som har reella koefficienter men imaginära nollställen. $\square$

   (e) Låt f vara ett irreducibelt polynom som delar produkten gh av polynomen g och h. Då måste f dela g eller h. (1 poäng)

   Svar. Sant. Detta motsvarar det faktum att om ett primtal delar en produkt av två heltal så delar primtalet också något av heltalen. $\square$