UPPSALA UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
DAN LILJA

Tentamen i matematik
ALGEBRA I
2018-08-21

Skrivtid: 5 timmar. Tillåtna hjälpmedel: endast skrivdon. Varje uppgift ger högst 5 poäng. För betygen 3, 4 och 5 krävs minst 18, 25, resp. 32 poäng. Lösningarna skall åtföljas av förklarande text. För full poäng krävs att du noggrant motiverar varje steg i ditt resonemang. Påbörja varje uppgift på ett nytt blad. Lycka till!

1. (a) Använd sanningsvärdestabeller för att bevisa De Morgans lagar, d.v.s. $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$ samt $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$ där $P$ och $Q$ är utsagor. (2 poäng)
   (b) Bevisa De Morgans lagar för mängder, d.v.s. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ samt $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ där $A$ och $B$ är mängder i något universum $X$. Tips: De Morgan's lagar för utsagor kan vara till hjälp. (3 poäng)

2. Lös den Diofantiska ekvationen $572x + 252y = 8$. (5 poäng)

3. (a) Visa att för alla udda heltal $a, b$ gäller att $8 \mid a^2 - b^2$. (3 poäng)
   (b) Bestäm resten som fås då $5^{83}$ delas med 9. (2 poäng)

4. Visa med induktion att
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
för alla heltal $n \geq 1$. (5 poäng)

5. Låt relationen $R$ på de komplexa talen $\mathbb{C}$ ges av
$$z\,R\,w \;\Leftrightarrow\; |z - w| < 4.$$
Avgör, med bevis eller motexempel, vilka av egenskaperna reflexiv, symmetrisk och transitiv som relationen $R$ uppfyller. (5 poäng)

6. Visa att mängden av alla komplexa tal på formen $a \pm ai$ där $a \in \mathbb{Z}$ är en uppräknelig mängd. (5 poäng)

7. Polynomet $x^4 - 5x^2 + 14x - 12$ har ett nollställe på formen $1 + bi$ för något reellt tal $b$. Hitta samtliga nollställen. (5 poäng)

8. (a) Återge faktorsatsen för polynom. (2 poäng)

   (b) Återge algebrans fundamentalsats. (2 poäng)

   (c) Vilka polynom är inverterbara, d.v.s. för vilka polynom $f$ finns det ett polynom $g$ sådant att $fg = 1$? (1 poäng)