UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Rostom Getsadze

Prov i matematik, Algebra I,
MaKand, DvKand, IT, Lärare
2020-01-15

Skrivtid: 5 timmar. Tillåtna hjälpmedel: endast skrivdon. Varje uppgift ger 5 poäng. För betygen 3, 4 och 5 krävs minst 18, 25 och 32 poäng. Lösningarna skall åtföljas av förklarande text. För full poäng krävs att du noggrant motiverar varje steg i ditt resonemang. Påbörja varje uppgift på ett nytt blad. Lycka till!

1. a.) Betrakta följande utsagor, där x står för ett heltal:

$$A : \text{"}x \text{ är delbart med } 5\text{"}$$

$$B : \text{"}17 \text{ är delbart med } 10\text{"}$$

$$C : \text{"}x \text{ är delbart med } 3\text{"}$$

$$D : \text{"}x \text{ är delbart med } 15\text{"}.$$

Vilka av följande implikationer är sanna (falska)?
$a_1)$ $(A \wedge C) \Longrightarrow D$, $a_2)$ $(A \wedge B) \Longrightarrow D$, $a_3)$ $(A \wedge B) \Longrightarrow C$. (3p)
b.) Låt E, F och D vara godtyckliga mängder. Bevisa att

$$E \cap (F \cup D) = (E \cap F) \cup (E \cap D),$$

genom att visa att varje element av vänsterledet tillhör till högerledet och omvänt. Alternativt kan du använda Venndiagram för ditt bevis. (2p)

2. a.) Skriv talet $(194)_{10}$ i bas 5. (2p)
b.) Finn resten då $3^{95} + 2$ delas med 10. (3p)

3. Bestäm alla heltalslösningar till den Diofantiska ekvationen

$$77x + 20y = 3.$$

(5p)

Vänd $\rightarrow$

4. a.) Visa att funktionen $f(x) = \sqrt{x-2} + 1$ från $[2, \infty)$ till $[1, \infty)$ är en bijektion och beräkna dess invers f^{-1}.

(3p)

b.) Beräkna summan

$$\sum_{k=2}^{n} 2\left(\frac{2}{3}\right)^k.$$

(2p)

5. Låt talen a_n vara givna av att $a_1 = \frac{1}{2}$ och

$$a_{n+1} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}(1 + a_n)}$$

för $n = 1, 2, 3, \ldots$. Bevisa att $0 \le a_n \le 1$ och $a_{n+1} \ge a_n$ för alla $n \ge 1$. (5p)

6. a.) Definiera begreppet ”uppräkneligt oändlig mängd”.

(1p)

b.) Definiera begreppet ”uppräknelig mängd”.

(1p)

c.) Visa att mängden av alla positiva udda heltal $M = \{1, 3, 5, \ldots\}$ är uppräkneligt oändlig. Motsvarande bijektion måste ges av en formel.

(2p)

d.) Ge ett exempel på en mängd som inte är uppräknelig.

(1p)

7. Polynomet $p(x) = 2x^3 + x^2 - 9$ har ett rationellt nollställe. Bestäm samtliga nollställen.

(5p)

8. Lös fullständigt ekvationerna $f(x) = x^4 - 6x^3 + 15x^2 - 18x + 10 = 0$ och $x^3 - 8x^2 + 21x - 20 = 0$, om man vet att de har minst en gemensam rot.

(5p)