UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Rostom Getsadze

Tentamen i matematik
Algebra I
2020-01-15

Lösningsförslag till tentan 2020-01-15

1. a.) Betrakta följande utsagor, där x står för ett heltal:

$$A : \text{"}x \text{ är delbart med } 5\text{"}$$

$$B : \text{"}17 \text{ är delbart med } 10\text{"}$$

$$C : \text{"}x \text{ är delbart med } 3\text{"}$$

$$D : \text{"}x \text{ är delbart med } 15\text{"}.$$

Vilka av följande implikationer gäller?
$a_1)$ $(A \wedge C) \Longrightarrow D$, $a_2)$ $(A \wedge B) \Longrightarrow D$, $a_3)$ $(A \wedge B) \Longrightarrow B$.
Lösning. $a_1)$ är sann eftersom 3 och 5 är primtal. $a_2)$ är sann eftersom B är falsk och alltså $(A \wedge B)$ är falsk. $a_3)$ är sann eftersom eftersom B är falsk och alltså $(A \wedge B)$ är falsk.
b.) Bevisa att

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

genom att visa att varje element av vänsterledet tillhör till högerledet och omvänt. Alternativt du kan använda Venndiagram för ditt bevis.
Lösning b.).

$$(x \in A \cap (B \cup C)) \iff (x \in A) \wedge (x \in (B \cup C)) \iff$$

$$\iff (x \in A) \wedge ((x \in B) \vee (x \in C)) \iff$$

$$\iff ((x \in A) \wedge (x \in B)) \vee ((x \in A) \wedge (x \in C)) \iff$$

$$\iff (x \in A \cap B) \vee (x \in A \cap C)) \iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

VSB.

2. a.) Skriv talet $(194)_{10}$ i bas 5.
Lösning. Vi börjar med att skriva alla potenser av 5 som är mondre än 194: $5^0 = 1$, $5^1 = 5$, $5^2 = 25$ och $5^3 = 125$.
Först delar vi 194 med $5^3 = 125$ för att se hur många 5^3 ryms där:

$$194 = 1 \cdot 5^3 + 69.$$

Sedan delar vi resten 69 med $5^2 = 25$ för att se hur många 5^2 ryms där:

$$69 = 2 \cdot 5^2 + 19.$$

Och nu delar vi 19 med $5^1 = 5$.

$$19 = 3 \cdot 5 + 4 = 3 \cdot 5 + 4 \cdot 5^0.$$

Vi får då

$$194 = 1 \cdot 5^3 + 69 = 1 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^2 + 19 = 1 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 5^0 = (1234)_5.$$

b.) Finn resten då $3^{95} + 2$ delas med 10.
Lösning. Vi har

$$3^4 = 81 \equiv 1(\mathrm{mod} 10)$$

Nu dividerar vi 3^{95} med 4:

$$95 = 23 \cdot 4 + 3.$$

Följaktligen,

$$3^{95} = (3^4)^{23} \cdot 3^3.$$

Men

$$(3^4)^{23} \equiv 1^{23}(\mathrm{mod} 10) \equiv 1(\mathrm{mod} 10)$$

och

$$3^3 \equiv 7(\mathrm{mod} 10).$$

Till slut erhåller vi att

$$3^{95} + 2 \equiv 1 \cdot 7(\mathrm{mod} 10) + 2(\mathrm{mod} 10) \equiv 9(\mathrm{mod} 10)$$

så att resten då $3^{95} + 2$ delas med 10 är 9.

3. Bestäm alla heltalslösningar till den Diofantiska ekvationen

$$77x + 20y = 3.$$

Lösning. Enligt Euklides algoritm har vi

$$\mathbf{77} = 3 \cdot \mathbf{20} + \mathbf{17}$$

$$\mathbf{20} = 1 \cdot \mathbf{17} + \mathbf{3}$$

$$\mathbf{17} = 5 \cdot \mathbf{3} + \mathbf{2}$$

$$\mathbf{3} = 1 \cdot \mathbf{2} + \mathbf{1}$$

$$\mathbf{2} = 2 \cdot \mathbf{1}.$$

Följaktligen, $\mathrm{SGD}(77, 20) = 1$ och

$$\begin{aligned} \mathbf{1} = \mathbf{3} - 1 \cdot \mathbf{2} &= \mathbf{3} - 1 \cdot (\mathbf{17} - 5 \cdot \mathbf{3}) \\ = 6 \cdot \mathbf{3} - \mathbf{17} &= 6 \cdot (\mathbf{20} - 1 \cdot \mathbf{17}) - \mathbf{17} = \\ = 6 \cdot \mathbf{20} - 7 \cdot \mathbf{17} &= 6 \cdot \mathbf{20} - 7 \cdot (\mathbf{77} - 3 \cdot \mathbf{20}) \\ &= 27 \cdot \mathbf{20} - 7 \cdot \mathbf{77}. \end{aligned}$$

Vi ser nu att en heltalslösning till hjälpekvationen

$$77x + 20y = 1.$$

är $x_0 = -7$ och $y_0 = 27$ och, följaktligen, den allmänna lösningen till den ursprungliga ekvationen

$$77x + 20y = 3$$

är $x = 3x_0 - 31n = -21 - 31n$ och $y = 3y_0 + 45n = 81 + 45n, \quad n \in Z.$

4 a.) Visa att funktionen $f(x) = \sqrt{x-2} + 1$ från $[2, \infty)$ till $[1, \infty)$ är en bijektion och beräkna dess invers f^{-1}.
Lösning. Vi har

$$(f(x_1) = f(x_2)) \Longrightarrow (\sqrt{x_1 - 2} + 1 = \sqrt{x_2 - 2} + 1)$$

$$(f(x_1) = f(x_2)) \Longrightarrow (\sqrt{x_1 - 2} = \sqrt{x_2 - 2})$$

$$(f(x_1) = f(x_2)) \Longrightarrow (x_1 - 2 = x_2 - 2) \Longrightarrow (x_1 = x_2).$$

Consequently, f är en injektion.
Låt nu $y \in [1, \infty)$. Betrakta ekvationen $f(x) = y$ dvs $\sqrt{x-2} + 1 = y$. Vi får då $\sqrt{x-2}+1 = y$, dvs $\sqrt{x-2} = y-1$, $x-2 = (y-1)^2$ och följaktligen $x = (y-1)^2+2 \geq 2$.
Därmed har vi visat att f är en bijektion och inversen existerar.
Låt $y = f^{-1}(x)$, då gäller $x = f(y)$, dvs $x = \sqrt{y-2} + 1$. Genom att lösa ut y får vi att

$$y = f^{-1}(x) = (x-1)^2 + 2.$$

b.) Beräkna summan

$$\sum_{k=2}^{n} 2 \left(\frac{2}{3}\right)^k.$$

Lösning. Vi har följande formel för en geometrisk summa

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad q \neq 1.$$

Därför

$$\sum_{k=2}^{n} 2 \left(\frac{2}{3}\right)^k = 2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2 \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \cdots + 2 \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$= 2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(1 + \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\right)$$

$$= 2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{8}{3} \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)\right)^{n-1}.$$

5. Låt talen a_n vara givna av att $a_1 = \frac{1}{2}$ och

$$a_{n+1} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}(1 + a_n)}$$

för $n = 1, 2, 3, \ldots$. Bevisa att $0 \leq a_n \leq 1$ och $a_{n+1} \geq a_n$ för alla $n \geq 1$.
Lösning. För $n = 1$ har vi $0 \leq a_1 = \frac{1}{2} \leq 1$ och

$$a_2 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}(1 + a_1)} = \sqrt[3]{\frac{3}{4}} \geq a_1 = \frac{1}{2}.$$

eftersom

$$\frac{3}{4} \geq \frac{1}{8}.$$

Så att påståendet är sant för $n = 1$.
Nu antag att påståendet är sant för m, $m \in Z$ dvs

$$0 \leq a_m \leq 1$$

och

$$a_{m+1} \geq a_m.$$

Vi har då att

$$a_{m+2} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}(1 + a_{m+1})} \geq \sqrt[3]{\frac{1}{2}(1 + a_m)} = a_{m+1}$$

och

$$0 \leq a_{n+2} \leq \sqrt[3]{\frac{1}{2}(1 + 1)} = 1.$$

Därmed har vi visat att påståendet är sant för $m + 1$.
Enligt induktionsprincipen är påståendet sant för alla $n = 1, 2, \ldots$.
VSB.

VSB.

(2p)

6. a.) Definiera begreppet ”uppräkneligt oändlig mängd”.
Lösning. Vi säger att en mängd ”A” är uppräkneligt oändlig om A är oändlig och det finns en injektion frå A till mängden N av alla naturliga tal.
b.) Definiera begreppet ”uppräknelig mängd”.
Lösning. Vi säger att en mängd A är uppräknelig om den är antingen ändlig eller uppräkneligt oändlig.
c.) Visa att mängden av alla positiva udda heltal $M = \{1, 3, 5, \dots\}$ är uppräkneligt oändlig. Motsvarande bijektion måste ges av en formel.
Lösning. Betrakta funktionen $f : \mathbf{N} \to \mathbf{M}$, där $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ är mängden av alla naturliga heltal, som definieras av formeln

$$f(n) = 2n + 1 \qquad n \in \mathbf{N}.$$

Vi har

$$n_1 \neq n_2 \Longrightarrow 2n_1 \neq 2n_2 \Longrightarrow f(n_1) \neq f(n_2).$$

Följaktligen är f injektiv.
Låt m vara ett godtyckligt element i $\mathbf{M} = \{1, 3, 5, \dots\}$. Vi löser följande ekvation

$$(f(n) = m) \iff (2n + 1 = m) \iff (n = \frac{m-1}{2} \in \mathbf{N}).$$

Följaktligen är f surjektiv.
Vi har visat att f är bijektiv och därmed är mängden av alla positiva udda heltal $M = \{1, 3, 5, \dots\}$ uppräkneligt oändlig.
d.) Ge ett exempel på en mängd som inte är uppräknelig.
Lösning. Till exempel, mängden av alla reella tal inter är uppräknelig.

7. Polynomet $p(x) = 2x^3 + x^2 - 9$ har ett rationellt nollställe. Bestäm samtliga nollställen.

Lösning. Alla koefficienter hos polynomet $f(x) = 2x^3 + x^2 - 9$ är heltal och därför om ett rationellt tal $x = \frac{p}{q}$ med $\mathrm{SGD}(p,q) = 1$ är ett nollställe till $f(x)$, då gäller att p är delare i 9 och q är delare i 2. De möjliga rationella nollställena är då

$$x = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{9}{2}, \pm 1, \pm 3, \pm 9.$$

.

Genom att pröva erhåller vi att $x = \frac{3}{2}$ är ett nollställe till $f(x)$. Enligt faktorsatsen är då polynomet $2x - 3$ en delare i $f(x)$. Nu genomför vi polynomdivision och erhåller $f(x) = (2x-3)(x^2 + 2x + 3)$. För att bestämma de övriga nollställena löser vi ut andra gradsekvationen $x^2 + 2x + 3 = 0$ och får $x = -1 + \sqrt{2}i$ och $x = -1 - \sqrt{2}i$. Polynomet f har, följaktligen, nollställena $x = \frac{3}{2}$, $x = -1 + \sqrt{2}$ och $x = -1 - \sqrt{2}$.

8. Lös fullständigt ekvationerna $f(x) = x^4 - 6x^3 + 15x^2 - 18x + 10 = 0$ och $x^3 - 8x^2 + 21x - 20 = 0$, om man vet att de har minst en gemensam rot.

Lösning. Om α är en gemensam rot till $f(x) = x^4 - 6x^3 + 15x^2 - 18x + 10 = 0$ och $x^3 - 8x^2 + 21x - 20 = 0$, då gäller enligt faktorsatsen att $x - \alpha$ är en icketrivial gemensam delare till polynomerna $f(x)$ och $g(x)$. Nu bestämmer vi en SGD med Euklides' algorithm:

$$f(x) = (x + 2)g(x) + 10(x^2 - 4x + 5). \tag{1}$$

$$g(x) = (x - 4)(x^2 - 4x + 5). \tag{2}$$

En SGD är alltså $h(x) = x^2 - 4x + 5$. Nu har vi från (2) och (1) att

$$g(x) = (x - 4)h(x)$$

och

$$f(x) = (x + 2)(x - 4)h(x) + 10h(x) = (x^2 - 2x + 2)h(x).$$

De gemensamma rötterna erhåller vi ur $h(x) = x^2 - 4x + 5 = 0$ och de är $x = 2 + i$ och $x = 2 - i$. Dessutom har ekvationen $g(x) = 0$ roten $x = 4$ och ekvationen $f(x) = 0$ rötterna till $x^2 - 2x + 2 = 0$, dvs $x = 1 + i$ och $x = 1 - i$.

Svar: $f(x) = 0$ har rötterna $x = 2 + i$, $x = 2 - i$, $x = 1 + i$ och $x = 1 - i$, medan $g(x) = 0$ har rötterna $x = 2 + i$, $x = 2 - i$ och $x = 4$.