UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Patrik Tydesjö

Tentamen
ALGEBRA 1
2021–01–05

Skrivtid 8–13. Tillåtna hjälpmedel: Endast skrivdon. Lösningarna ska vara försedda med motiveringar. Varje uppgift ger högst 5 poäng totalt. För betygen 3, 4 respektive 5 krävs minst 18, 25 respektive 32 poäng totalt. Lösningarna skannas in och laddas upp (i en och samma pdf-fil) på Studium på därför ämnad plats. Skrivtiden förlängs med 20 minuter för att ge tid åt inlämningsmomentet. Ange din anonymitetskod på varje papper. På första bladet anges totalt antal sidor, och på varje blad anges sidnumrering. Saknar du anonymitetskod skriver du namn och personnummer på varje blad. Spara för säkerhets skull originalet till alla dina lösningar.

1. Visa, till exempel med hjälp av Venn-diagram, att $(A^* \cap B^*)^* = A \cup B$. (Här betecknar A^* och B^* komplementen av A respektive B.) (5)

2. a) Visa att mängden av jämna kvadrater, dvs mängden $\{1, 4, 9, 16, ...\}$, är en uppräknelig mängd. (3)

b) Visa att mängden av rent imaginära tal, dvs tal av typen $z = ix$, där i är den imaginära enheten och x är ett reellt tal, har samma kardinalitet som de reella talen $\mathbb{R}$. (2)

3. Skriv talet $(100)_{tio}$ i basen *fyra*. (5)

4. Formulera följande två satser (utan bevis) samt förklara kortfattat varför de är viktiga.

a) Aritmetikens fundamentalsats. (3)

b) Algebrans fundamentalsats. (2)

5. Låt $f : X \to Y$ vara en funktion från en mängd X till en mängd Y. Definiera en relation R på mängden X genom att $x_1 R x_2$ om och endast om $f(x_1) = f(x_2)$.

a) Visa att detta är en ekvivalensrelation. (3)

b) Beskriv ekvivalensklasserna till relationen R ovan, i det specialfall då $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definieras av att $f(x) = x^2$. (2)

6. Visa med induktion att olikheten $2^n < n!$ gäller för alla $n \geq 4$. Här betecknar $n!$ talet $1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$. (5)

7. Lös följande system av kongruenser med hjälp av kinesiska restsatsen.

$$\begin{cases} x \equiv 1 \mod 2 \\ x \equiv 2 \mod 3 \\ x \equiv 1 \mod 5 \end{cases}$$

(5)

8. Ekvationen $6x^4 + x^3 + 4x^2 + x - 2 = 0$ har två rationella rötter. Lös ekvationen fullständigt. (5)