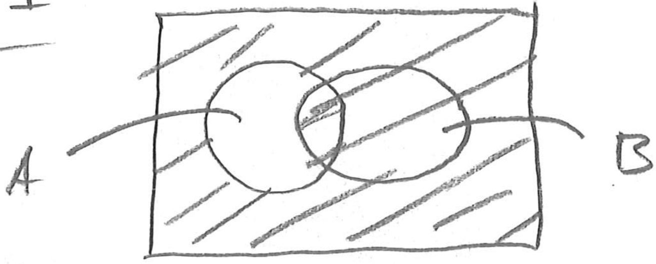
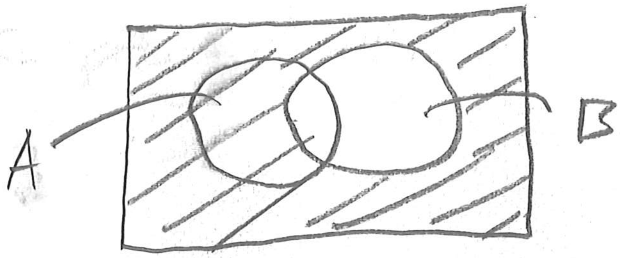
Lösningsförslag till tentamen i Algebra I (2021-01-05)

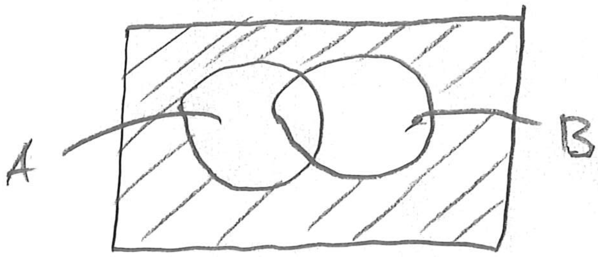
Uppgift 1:



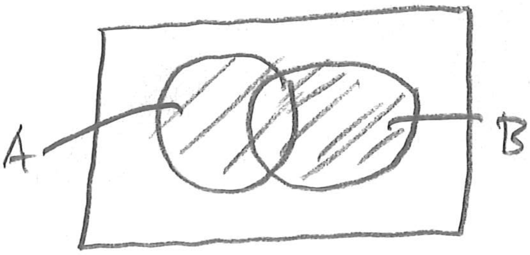
Det skuggade området utgör A^*.



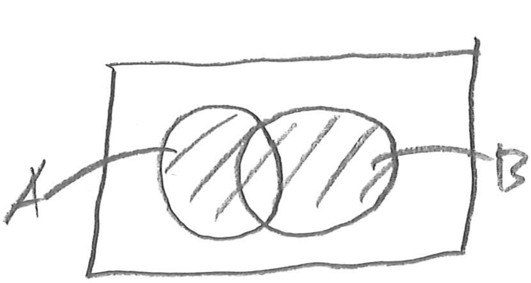
Det skuggade området utgör B^*.



Genom att ta skärningen mellan ovanstående områden får vi $A^* \cap B^*$.



Komplementet till det skuggade området ovan är $(A^* \cap B^*)^*$, här till vänster.



Vi ser att denna mängd sammanfaller med $A \cup B$ som ses här till vänster.

Vi drar därmed slutsatsen att $(A^* \cap B^*)^* = A \cup B$.

Uppgift 2:

(a) Vi behöver hitta en bijektion från $\mathbb{N}$ till mängden $M = \{1, 4, 9, 16, \ldots\}$. Man kan välja $f(n) = (n+1)^2$ där $n \in \mathbb{N}$. Denna funktion är injektiv, ty $f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow (n_1+1)^2 = (n_2+1)^2 \Rightarrow n_1+1 = n_2+1$, ty

detta är ickenegativa tal. Vi har alltså $n_1 = n_2$ så f är injektiv. Vi vill även visa att f är surjektiv. Välj ett element ur M. Detta kan skrivas som m^2 för något tal m. Om vi nu tar $n = m-1$

får vi $f(n) = (n+1)^2 = m^2$. Funktionen är alltså bijektiv och således är M uppräknelig.

Uppgift 2:

(b) Vi behöver hitta en bijektion mellan $\mathbb{R}$ och $I = \{ir : r \in \mathbb{R}\}$. Ta till exempel $g(r) = ir$ för $r \in \mathbb{R}$. Denna är injektiv, ty $g(r_1) = g(r_2) \Rightarrow ir_1 = ir_2 \Rightarrow r_1 = r_2$.
Låt nu $z \in I$. Då är $z = ix$ för något $x \in \mathbb{R}$. Således $g(x) = ix = z$ och g är surjektiv. g är bijektiv och således har I samma kardinalitet som $\mathbb{R}$.

Uppgift 3

Vi skriver upp potenser av fyra tills vi kommer över 100: $4^0=1$, $4^1=4$, $4^2=16$, $4^3=64$ och $4^4=256$.

Vi har nu

$$100 = 1\cdot 64 + 36$$
$$36 = 2\cdot 16 + 4$$
$$4 = 1\cdot 4$$
$$0 = 0\cdot 1 .$$

Detta visar att vi kan skriva

$$100 = 1\cdot 4^3 + 2\cdot 4^2 + 1\cdot 4^1 + 0\cdot 4^0 .$$

Således gäller att $(100)_{tio} = (1210)_{fyra}$.

Uppgift 4: Se till exempel kursboken eller föreläsningsanteckningarna.

Uppgift 5 a) Relationen är reflexiv, ty det vill säga att xRx alltid gäller, då trivialt $f(x)=f(x)$.

Vidare är relationen symmetrisk, det vill säga att $xRy \Rightarrow yRx$ för alla x och y, ty

$f(x)=f(y) \Rightarrow f(y)=f(x)$.

Slutligen är relationen transitiv, det vill säga att xRy och $yRz \Rightarrow xRz$ för alla x, y, z, ty $f(x)=f(y)$ och $f(y)=f(z)$

$\Rightarrow f(x)=f(z)$.

b) Ekvivalensklasserna består av de reella tal som har samma kvadrat, det vill säga att x och y tillhör samma ekvivalensklass om $x^2=y^2$, vilket är fallet då $y=x$ eller $y=-x$. Således gäller att $[x]=\{x,-x\}$. Inga andra element finns här, ty $x^2 \neq y^2$ då $x \neq \pm y$.

Uppgift 6   Påståendet P_4 säger att

$2^4 < 4!$, vilket är sant, ty

$2^4 = 16$ och $4! = 24$ så att

$16 < 24$. Detta utgör basen för induktionen.

Låt nu P_p vara sant, det vill säga att

$2^p < p!$. Vi ska visa att P_{p+1} då är

sant, det vill säga att $2^{p+1} < (p+1)!$.

Men $2^{p+1} = 2^p \cdot 2 < p! \cdot 2 < p! \cdot (p+1) = (p+1)!$

Den första olikheten följer av induktions-antagandet och den andra följer av att

$p+1 > 2$. Induktionsprincipen ger nu att påståendet

är sant för alla $n \geq 4$.

Uppgift 7

Vi ansätter $x = b_1 \cdot 3 \cdot 5 + b_2 \cdot 2 \cdot 5 + b_3 \cdot 2 \cdot 3$.

Vi får då följande system av dekopplade kongruenser:

$$\begin{cases} b_1 \cdot 3 \cdot 5 \equiv 1 \pmod{2} \\ b_2 \cdot 2 \cdot 5 \equiv 2 \pmod{3} \\ b_3 \cdot 2 \cdot 3 \equiv 1 \pmod{5} \end{cases}$$

Dessa kan lösas var för sig och vi får då $b_1 \equiv 1 \pmod{2}$, ty $3 \equiv 1$ och $5 \equiv 1 \pmod{2}$. Vidare är $b_2 \equiv 2 \pmod{3}$, ty $2 \cdot 5 = 10 \equiv 1 \pmod{3}$. Slutligen är $b_3 \equiv 1 \pmod{5}$, ty $6 \equiv 1 \pmod{5}$. Detta ger $x = 1 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 2 \cdot 5 + 1 \cdot 2 \cdot 3 = 41$.

Således får vi lösningen $x = 41 \equiv 11 \pmod{30}$, ty $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. Lösningarna kan skrivas $x = 11 + n \cdot 30$ för $n \in \mathbb{Z}$.

Uppgift 8: Ekvationen har endast heltalskoefficienter. Detta gör att vi kan använda en sats om rötter som är rationella. Satsen säger att om en ekvation har bara heltalskoefficienter så gäller att om det finns rationella rötter så måste de se ut på ett speciellt sätt: Vi har att $\frac{p}{q}$ är en tänkbar lösning för heltal p och q om p delar den konstanta termen och q delar högstagradskoefficienten. Således gäller i så fall att $p|2$ och $q|6$. Möjliga värden på p är då ± 1 eller ± 2 och möjliga värden på q är $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Vi får alltså prova med lösningarna $\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{6}, \pm 2, \pm\frac{2}{3}$ och $\pm\frac{1}{3}$. Insättning ger att $\frac{1}{2}$ och $-\frac{2}{3}$ är rötter.

Uppgift 8: (forts.) Vi ska alltså dividera bort faktorn $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right) =$

$= x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}x - \frac{2}{6} = x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{3}$. Detta polynom är ekvivalent med $6x^2+x-2$.

Vi utför polynomdivision:

$$
\begin{array}{l|l}
\multicolumn{1}{l}{x^2 + 1} & \\
\hline
6x^4 + x^3 + 4x^2 + x - 2 & 6x^2 + x - 2 \\
\cline{2-2}
-(6x^4 + x^3 - 2x^2) & \\
\cline{1-1}
\qquad 6x^2 + x - 2 & \\
\quad -(6x^2 + x - 2) & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

$x^2+1=0$ har rötterna $x = \pm i$.

Svar: Rötterna är $x = \frac{1}{2}$, $x = -\frac{2}{3}$, $x = i$ samt $x = -i$.