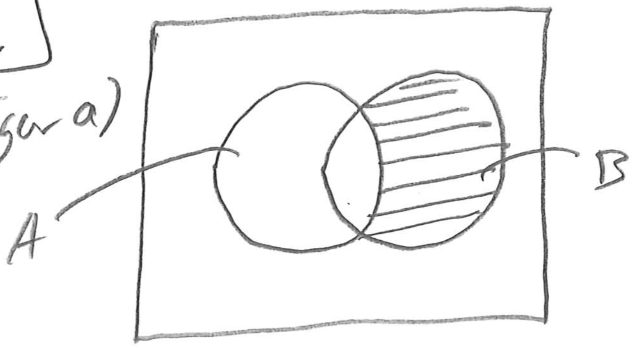
Lösningsförslag till tentamen i Algebra I 2021-06-15

1.

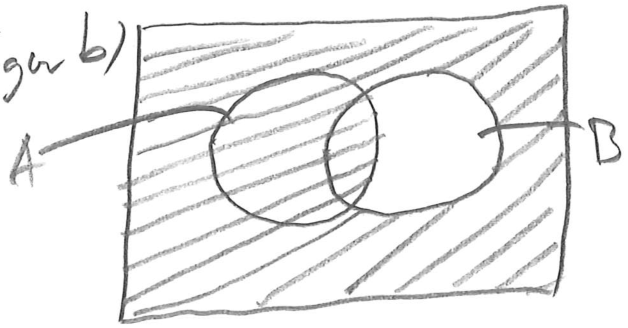
Till vänster ser vi:

Figur a)



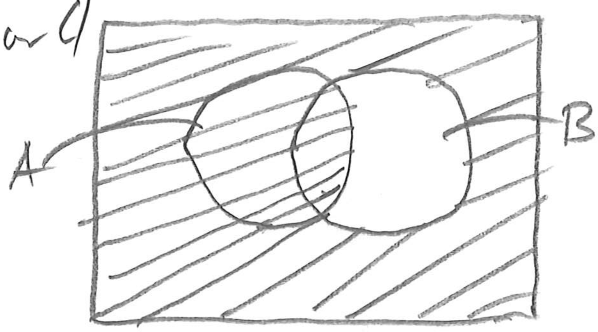
$A^* \cap B$

Figur b)



$(A^* \cap B)^*$

Figur c)



$A \cup B^*$

Vi ser att figur b) överensstämmer med figur c) så vi har visat att

$$(A^* \cap B)^* = A \cup B^* .$$

12. Vi har $6^0=1$, $6^1=6$, $6^2=36$ (2)

6^3, 216 och $6^4=1296$. Vi ser

att $300 = 1\cdot 216 + 84 = 1\cdot 216 + 2\cdot 36 + 12 =$

$= 1\cdot 216 + 2\cdot 36 + 2\cdot 6 = 1\cdot 216 + 2\cdot 36 + 2\cdot 6 + 0\cdot 1 =$

$= 1\cdot 6^3 + 2\cdot 6^2 + 2\cdot 6^1 + 0\cdot 6^0$.

Vi ser alltså att $(300)_{tio} = (1220)_{sex}$.

3. Vi har $7^1 \equiv 7 \pmod{10}$,

$7^2 = 49 \equiv 9 \pmod{10}$,

$7^3 = 343 \equiv 3 \pmod{10}$ och

$7^4 = 2401 \equiv 1 \pmod{10}$. Således

gäller att $7^{22} = 7^{4\cdot 5+2} = 7^{4\cdot 5}\cdot 7^2 =$

$= (7^4)^5 \cdot 7^2 \equiv 1\cdot 7^2 = 49 \equiv 9 \pmod{10}$.

Den sista siffran är alltså 9.

4. Likheten gäller för $n=1$, ty (4)

$$\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = \frac{1^2\cdot(1+1)^2}{4}.$$

Antag nu att likheten är uppfylld för $n=p$. Vi ska visa att likheten då är uppfylld för $n=p+1$.

$$VL_{p+1} = \sum_{k=1}^{p+1} k^3 = \sum_{k=1}^{p} k^3 + (p+1)^3 \underset{\uparrow}{=} \frac{p^2(p+1)^2}{4} + (p+1)^3 =$$

induktions-
antagande

$$= \frac{p^2(p+1)^2}{4} + \frac{4(p+1)^3}{4} = \frac{(p+1)^2(p^2+4(p+1))}{4} =$$

$$= \frac{(p+1)^2(p^2+4p+4)}{4} = \frac{(p+1)^2(p+2)^2}{4} =$$

$= HL_{p+1}$. Bassteget och induktionssteget är båda uppfyllda, så induktionsprincipen ger att likheten gäller för alla $n \geq 1$.

5. $4 \mid (a-1)$ betyder att

(5)

$a-1 = 4 \cdot k$ för något heltal k. Alltså

är $a = 4k+1$. Nu är $a^2+3 =$

$(4k+1)^2+3 = 16k^2+8k+1+3 =$

$= 16k^2+8k+4 = 4(4k^2+2k+1)$.

Då $4k^2+2k+1$ är ett heltal så

gäller alltså att $4 \mid (a^2+3)$.

6. (a) Om $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ så är $\deg(f) = n$, dvs den högsta exponent över x som har en nollskild koefficient framför sig.

(b) Låt nu $g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$, dvs $\deg(g) = m$.

$f(x) \cdot g(x) = a_n \cdot b_m \cdot x^{n+m}$ + termer av lägre grad. Då a_n och $b_m \neq 0$ ser vi att

$\deg(f \cdot g) = n + m = \deg(f) + \deg(g)$.

$\boxed{7.}$ Vi ser att alla koefficienter är heltal. Enligt sats gäller då att om det finns rationella rötter $\frac{p}{q}$ så måste $p \mid 12$ och $q \mid 4$. Det finns en massa möjligheter att pröva. Insättning ger att $x = \frac{3}{2}$ samt $x = -\frac{1}{2}$ uppfyller ekvationen. Således gäller att

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) = x^2 - \frac{3x}{2} + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} = x^2 - x - \frac{3}{4}$$

är en delare i polynomet. Polynomdivision ger:

$$\begin{array}{l|l}
\quad 4x^2 \qquad + 16 & \\
\hline
4x^4 - 4x^3 + 13x^2 - 16x - 12 & x^2 - x - \frac{3}{4} \\
-(4x^4 - 4x^3 - 3x^2) & \\
\hline
\qquad 16x^2 - 16x - 12 & \\
\quad -(16x^2 - 16x - 12) & \\
\hline
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

$\boxed{7.}$ (forts.) $4x^2+16$ ut går alltså en faktor i polynomet. $4x^2+16=0$ har rötterna $x=\pm 2i$.

Svar: Ekvationen har rötterna

$x=\frac{3}{2}$, $x=-\frac{1}{2}$, $x=2i$ samt $x=-2i$.

8. (a) A har samma kardinalitet 9

som B om och endast om det

finns en bijektion f mellan A och B,

dvs $f: A \to B$ är en bijektion.

(b) Låt talet a vara ett decimaltal.

Om a har n stycken nollskilda decimaler

multiplicera talet a med 10^n. Talet

$a \cdot 10^n$ är ett heltal m. Således gäller att

$a \cdot 10^n = m$ och alltså $a = \frac{m}{10^n}$ är ett

rationellt tal. Mängden av decimaltal kan

alltså inte vara större än mängden av

rationella tal, då decimaltalen utgör en

delmängd av dessa. Eftersom decimaltalen

uppenbarligen är oändligt många, måste

decimaltalen vara en uppräkneligt oändlig

mängd.