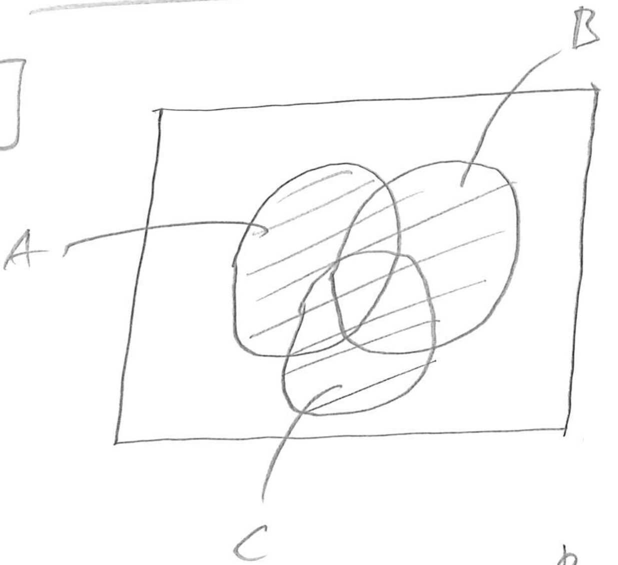
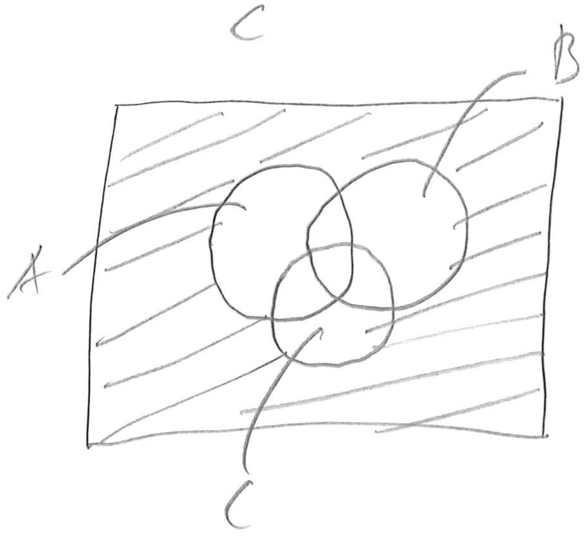
Lösningsförslag till tentamen i Algebra I (1)

2021-08-25

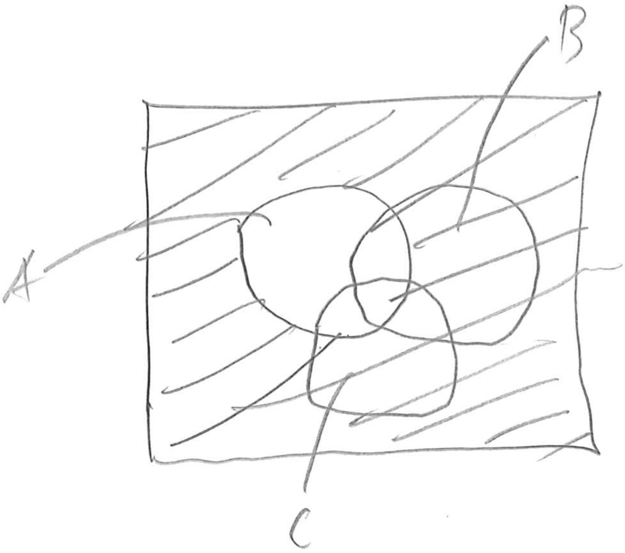
1.



Det skuggade området till vänster är $A \cup B \cup C$.

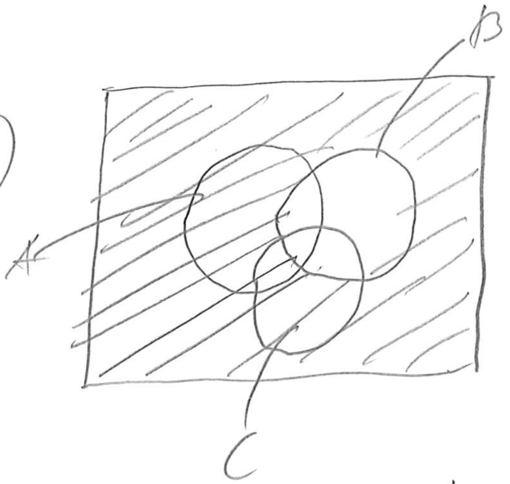


Således utgör området till vänster dess komplement, dvs $(A \cup B \cup C)^*$.

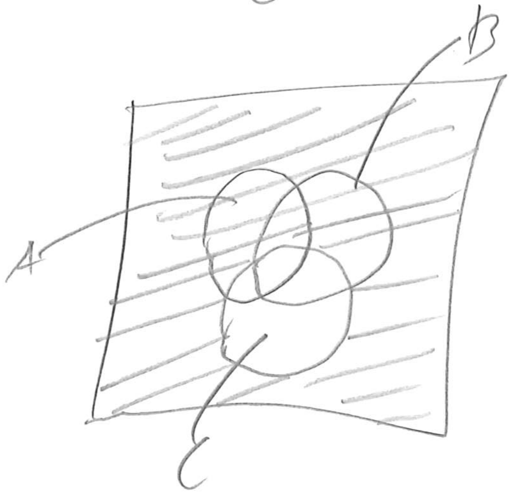


Området till vänster är A^*, dvs utanför A.

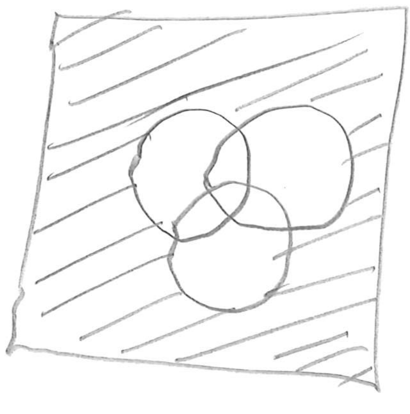
11.
(forts.)



Området till vänster är B^*.



På samma sätt är området till vänster C^*.



Området $A^* \cap B^* \cap C^*$ är skärningen av de tre områdena ovan, dvs figuren till höger.

Vi ser att detta är samma område som $(A \cup B \cup C)^*$ ovan.

2. Vi har $4^0 = 1$, $4^1 = 4$, $4^2 = 16$,

$4^3 = 64$, $4^4 = 256$.

$183 = 2 \cdot 64 + 55$

$55 = 3 \cdot 16 + 7$

$7 = 1 \cdot 4 + 3$.

Vi ser alltså att $183 = 2 \cdot 64 + 3 \cdot 16 + 1 \cdot 4 + 3 =$

$= 2 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4^1 + 3 \cdot 4^0$.

Alltså gäller att $(183)_{tio} = (2313)_{fyra}$.

$\boxed{3.}$ Vi har $7^1 \equiv 7 \pmod{10}$,

$7^2 = 49 \equiv 9 \pmod{10}$, $7^3 = 343 \equiv 3 \pmod{10}$

$7^4 = 2401 \equiv 1 \pmod{10}$. Nu är

$38 = 9 \cdot 4 + 2$, så att

$$7^{38} = 7^{9 \cdot 4 + 2} = (7^4)^9 \cdot 7^2 = (7^4)^9 \cdot 49 \equiv$$

$$\equiv 1^9 \cdot 9 = 9 \pmod{10}.$$

4. Påståendet gäller för $n=1$, 5

ty $\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1 = \frac{1\cdot(1+1)\cdot(2\cdot 1+1)}{6}$.

Bassteget är alltså uppfyllt.

Antag att påståendet gäller för $n=p$. Vi ska visa att det då gäller för $n=p+1$.

$VL_{p+1} = \sum_{k=1}^{p+1} k^2 = \sum_{k=1}^{p} k^2 + (p+1)^2$. Enligt induktionsantagandet gäller att $\sum_{k=1}^{p} k^2 =$

$= \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$. Vi får alltså

$$VL_{p+1} = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6} + (p+1)^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)+6(p+1)^2}{6} =$$

$$= (p+1)\frac{\left(p(2p+1)+6(p+1)\right)}{6} = \frac{(p+1)}{6}(2p^2+7p+6).$$

4. (forts.) Vidare är $HL_{p+1} =$

$$= \frac{(p+1)(p+2)(2(p+1)+1)}{6} = \frac{(p+1)}{6}(2p^2+7p+6).$$

Således gäller att $VL_{p+1} = HL_{p+1}$ och påståendet gäller alltså, pga induktionsaxiomet för alla $n \geq 1$.

5. (a) $a | b$ betyder att det finns ett heltal k så att $b = a \cdot k$.

Nu är $b^2 = a^2 \cdot k^2$. k^2 är ju ett heltal och därför gäller att $a^2 | b^2$.

(b) Enligt sats gäller att $p | mn$ medför att $p | m$ eller $p | n$. Således gäller att $p | a^2$ medför att $p | a$.

Användning av (a) visar nu att $p^2 | a^2$ och vi är klara.

7

$\boxed{6.}$ (a) Eftersom den nämnda mängden som mest kan vara uppräkneligt oändlig (då den är en delmängd av de positiva heltalen) räcker det att visa att mängden är oändlig. Det räcker vidare att visa att den nämnda mängden innehåller en oändlig mängd. Enligt aritmetikens fundamentalsats gäller att talen 5^n för $n \geq 1$ <u>inte</u> är delbara med 2 eller 3. Nu är mängden $\{5^n : n \geq 1\}$ oändlig, ty $5^n \neq 5^m$ då $n \neq m$.

(b) Vi behöver hitta en bijektion $f: \mathbb{R} \to L_k$. Vi kan till exempel använda

$$f(x) = (x, kx).$$

$\boxed{7.}$ (a) Låt S beteckna den nämnda relationen. Tydligen är S reflexiv, ty $(x,y)S(x,y)$. S är vidare symmetrisk, ty om (x_1,y_1) har samma avstånd till origo som (x_2,y_2), så har (x_2,y_2) samma avstånd till origo som (x_1,y_1), så att

$$(x_1,y_1)S(x_2,y_2) \Rightarrow (x_2,y_2)S(x_1,y_1).$$

Slutligen gäller att S är transitiv, ty då (x_1,y_1) har samma avstånd till origo som (x_2,y_2) och (x_2,y_2) har samma avstånd till origo som (x_3,y_3) så gäller ~~att~~ (x_1,y_1) har samma avstånd till origo som (x_3,y_3). Således får vi

$$(x_1,y_1)S(x_2,y_2) \wedge (x_2,y_2)S(x_3,y_3) \Rightarrow (x_1,y_1)S(x_3,y_3).$$

$\boxed{7.}$ (forts.)

(b) Ekvivalensklasserna utgörs av cirklar kring origo.

$\boxed{8.}$ Enligt sats gäller att om

$\frac{p}{q}$ är en rot (p och q är heltal)

så ska $p \mid a_0$ och $q \mid a_4$, alltså

$p \mid 4$ och $q \mid 6$ om $SGD(p, q) = 1$.

$p \mid 4$ betyder att $p = \pm 1, \pm 2, \pm 4$ och

$q \mid 6$ betyder att $q = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. En del

av dessa försvinner då vi kräva att

$SGD(p, q) = 1$. Möjliga rötter är nu

$$\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{6}, \pm 2, \pm \frac{2}{3}, \pm 4, \pm \frac{4}{3}.$$

Prövning ger att $\frac{1}{2}$ och $-\frac{1}{3}$ utgör rötter.

Enligt faktorsatsen utgör $(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{3})$ en faktor i polynomet

$6x^4-x^3+23x^2-4x-4$. Vi dividerar bort denna faktor, som kan skrivas $x^2-\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}$.

$$
\begin{array}{l|l}
\quad 6x^2+0+24 & \\
\hline
6x^4-x^3+23x^2-4x-4 & x^2-\frac{1}{6}x-\frac{1}{6} \\
-(6x^4-x^3-x^2) & \\
\hline
\qquad 24x^2-4x-4 & \\
\quad -(24x^2-4x-4) & \\
\hline
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

$6x^2+24$ utgör alltså också en faktor i polynomet. Denna faktor är ekvivalent med x^2+4. Ekvationen $x^2+4=0$ ha rötterna $x=\pm 2i$.

Svar: Rötterna är $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, $2i$ samt $-2i$.