Uppsala universitet
Matematiska institutionen
Martin Herschend

Tentamen 2022–06–13
Algebra I

Skrivtid: 8:00-13:00. Tillåtna hjälpmedel: endast skrivdon. Tentan består av 8 uppgifter och varje uppgift är värd 5 poäng. Totalt krävs 18 poäng för betyget 3, 25 poäng för betyget 4 och 32 poäng för betyget 5. Alla lösningar ska innehålla fullständiga resonemang och inte bara svar.

Uppgift 1. Avgör i vart och ett av nedanstående fall om det finns icke-tomma delmängder $A, B \subseteq \mathbb{Z}$ som uppfyller det givna villkoret. Om sådana mängder finns ska ett exempel anges. Om inte ska en kort motivering ges.

(a) $A \cap B = \emptyset$,

(b) $A \cup B = \emptyset$,

(c) $A \cap B = B$,

(d) $B \subseteq A \setminus B$,

(e) $A \setminus B \subseteq B$.

Uppgift 2.

(a) Bestäm alla lösningar till den diofantiska ekvationen $31x + 41y = 1000$.

(b) Bestäm den lösning (x, y) som uppfyller $x > 0$ och $y > 0$.

Uppgift 3. I basen m gäller $(111)_m \cdot (54)_m = (6324)_m$. Bestäm m.

Uppgift 4. Visa med induktion att

$$\sum_{k=1}^{n} 4k^3 = n^2(n+1)^2.$$

Uppgift 5. Hitta alla heltal x som uppfyller följande system av kongruenser.

$$\begin{cases} x \equiv 2 & \mod 4 \\ x \equiv 6 & \mod 8 \\ x \equiv 5 & \mod 9 \end{cases}$$

Uppgift 6. Definiera relationen R på mängden av komplexa tal $\mathbb{C}$ så att xRy om och endast om det finns positiva heltal a och b så att $x^a = y^b$.

(a) Visa att R är en ekvivalensrelation.

(b) Visa att $\{0\}$ är en ekvivalensklass.

(c) Visa att varje annan ekvivalensklass har oändligt många element.

Var god vänd!

Uppgift 7. Låt X vara mängden av alla slutna intervall vars ändpunkter är rationella tal, det vill säga

$$X = \{[a, b] \subseteq \mathbb{R} \mid a, b \in \mathbb{Q},\ a < b\}.$$

Visa att X är uppräknelig.

Uppgift 8. Ekvationen

$$x^3 + (1 - 2i)x^2 + (2 - 6i)x + (2 - 4i) = 0$$

har en lösning $x = -1$. Bestäm övriga lösningar.

1

Lösningar Algebra I, 2022-06-13.

a) Ja. Ta två mängder som inte har några gemensamma element.

Till exempel $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$

Då är $A \cap B = \emptyset$.

b) Nej. Om $A \cup B = \emptyset$ så är $A = \emptyset$ och $B = \emptyset$.

c) Ja. Välj A och B så att $B \subseteq A$.

Till exempel $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2\}$.

Då är $A \cap B = \{1, 2\} = B$.

d) Nej. Om $x \in B$ så är $x \notin A \setminus B$.

e) Ja. Välj A och B så att $A \subseteq B$.

Till exempel $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$

Då är $A \setminus B = \emptyset \subseteq B$.

② Vi löser $31x + 41y = 1000$

SGD(31, 41) = ?

$41 = 31 + 10$

$31 = 3 \cdot 10 + 1$ så SGD(31, 41) = 1

$31x_0 + 41y_0 = 1$:

$1 = 31 - 3 \cdot 10$

$= 31 - 3(41 - 31) = 4 \cdot 31 - 3 \cdot 41$

$\Rightarrow (x_0, y_0) = (4, -3)$ ger $31x_0 + 41y_0 = 1$

$\Rightarrow 31 \cdot (1000x_0) + 41 \cdot (1000y_0) = 1000$

a) Alla lösningar $\begin{cases} x = 4000 - 41n, \\ y = -3000 + 31n, \end{cases}$ $n \in \mathbb{Z}$.

$x > 0 \iff 4000 > 41n$. Vi delar 4000 med 41.

$$\begin{array}{r|l} 97 & \\ \hline 4000 & 41 \\ -369 & \\ \hline 310 & \\ 287 & \\ \hline 23 & \end{array}$$

ger $4000 = 41 \cdot 97 + 23$

Alltså är $x > 0 \iff n \leq 97$

$n = 97$ ger $x = 23$ som är minsta positiva värdet på x.

För $n = 97$ är $y = -3000 + 31 \cdot 97$

$= -3000 + 3100 - 93$

$= 7 > 0$

b) $(x, y) = (23, 7)$ är lösningen som uppfyller $x > 0, y > 0$.

Koll: $31 \cdot 23 + 41 \cdot 7 = 713 + 287 = 1000$, ok.

3

$$(111)_m \cdot (54)_m = (m^2+m+1)(5m+4)$$

$$= 5m^3 + 5m^2 + 5m + 4m^2 + 4m + 4$$

$$= 5m^3 + 9m^2 + 9m + 4.$$

$$(6324)_m = 6m^3 + 3m^2 + 2m + 4.$$

Alltså: $0 = (6324)_m - (111)_m \cdot (54)_m$

$$= m^3 - 6m^2 - 7m = m(m^2 - 6m - 7)$$

Lösningar $\quad m = 0, \quad m = 3 \pm \sqrt{9+7} = 3 \pm 4$

$$m > 0 \Rightarrow m = 3 + 4 = 7$$

Svar: $m = 7.$

4 Vi visar $\sum_{k=1}^{n} 4k^3 = n^2(n+1)^2$ med induktion.

Basfall $n=1$ ger $VL = 4 \cdot 1^3 = 4$

$HL = 1^2 \cdot (1+1)^2 = 4$ ok.

Induktionssteg. Antag $\sum_{k=1}^{m} 4k^3 = m^2(m+1)^2$ för något $m \geq 1$.

Då är $\sum_{k=1}^{m+1} 4k^3 = \sum_{k=1}^{m} 4k^3 + 4(m+1)^3 = m^2(m+1)^2 + 4(m+1)^3$ bryt ut $(m+1)^2$

$= (m^2 + 4(m+1))(m+1)^2 = (m^2+4m+4)(m+1)^2$

$= (m+2)^2(m+1)^2$ ok

Enligt induktionsprincipen följer

$$\sum_{k=1}^{n} 4k^3 = n^2(n+1)^2 \quad \text{för alla } n \geq 1.$$

5 Vi löser $\begin{cases} x \equiv 2 \mod 4 \\ x \equiv 6 \mod 8 \\ x \equiv 5 \mod 9 \end{cases}$ SGD = 4 ≠ 1

$x \equiv 6 \mod 8 \Rightarrow x = 8k + 6 \equiv 2 \mod 4$

Alltså $\begin{cases} x \equiv 2 \mod 4 \\ x \equiv 6 \mod 8 \\ x \equiv 5 \mod 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 6 \mod 8 \\ x \equiv 5 \mod 9 \end{cases}$ SGD = 1

sätt $x = 9x_1 + 8x_2$

Vi får $9x_1 \equiv 6 \mod 8 \Leftrightarrow x_1 \equiv 6 \mod 8$,

$8x_2 \equiv 5 \mod 9 \Leftrightarrow -x_2 \equiv 5 \mod 9$

$\Leftrightarrow x_2 \equiv -5 \mod 9.$

En lösning är $x = 9 \cdot 6 + 8 \cdot (-5) = 54 - 40 = 14$

Eftersom SGD(8,9) = 1 ger kinesiska restsatsen att

alla lösningar är $\underline{x = 14 + 72n, \ n \in \mathbb{Z}}$.

Koll: $14 = 12 + 2 \equiv 2 \mod 4,$
$14 = 8 + 6 \equiv 6 \mod 8,$ ok.
$14 = 9 + 5 \equiv 5 \mod 9.$

6 a) Reflexiv: $x^1 = x^1$ så xRx.

Symmetrisk: $xRy \Rightarrow \exists a,b : x^a = y^b$
$\Rightarrow y^b = x^a \Rightarrow yRx$.

Transitiv: xRy och yRz
$\Rightarrow \exists a,b,c,d : \begin{cases} x^a = y^b \\ y^c = z^d \end{cases}$

$\Rightarrow x^{ac} = y^{bc} = z^{bd} \Rightarrow xRz$
eftersom ac, bd är positiva heltal.

Alltså är R en ekvivalensrelation.

b) $xR0 \Rightarrow \exists a,b : x^a = 0^b = 0 \Rightarrow x = 0$

så ekvivalensklassen av 0 är $\{0\}$.

c) Om $x \neq 0$ så har den binomiska ekvationen
$z^n = x$, n olika lösningar $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$,
som alla tillhör klassen $[x]$ av x.
Alltså har $[x]$ minst n element för varje heltal $n > 0$. Det följer att $[x]$ är oändlig.

7

Funktionen $X \longrightarrow \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$
$[a, b] \longmapsto (a, b)$

är injektiv. Vi vet att $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$
så $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$. Alltså finns
en injektiv funktion $X \longrightarrow \mathbb{N}$.
Enligt sats är X därmed uppräknelig.

(8) Sätt $f(x) = x^3 + (1-2i)x^2 + (2-6i)x + (2-4i)$.

$f(-1) = 0 \Rightarrow (x+1)$ delar f. Vi utför divisionen:

$$g(x) := x^2 - 2ix + 2 - 4i$$

$$\begin{array}{l} x^3 + (1-2i)x^2 + (2-6i)x + (2-4i) \quad \big| \; x+1 \\ -(x^3 + x^2) \\ \hline \quad -2ix^2 + (2-6i)x + (2-4i) \\ \quad -(-2ix^2 - 2ix) \\ \hline \qquad (2-4i)x + (2-4i) \\ \qquad -((2-4i)x + (2-4i)) \\ \hline \qquad\qquad 0 \end{array}$$

Alltså $f(x) = g(x)(x+1)$. Nu kvadratkompletterar vi $g(x)$:

$$g(x) = \underline{x^2 - 2ix} + 2 - 4i = \underline{(x-i)^2 - (-1)} + 2 - 4i$$
$$= (x-i)^2 + 3 - 4i$$

Vi löser $g(x) = 0 \iff (x-i)^2 = -3 + 4i$

Sätt $x - i = w = a + bi$, så $w^2 = -3 + 4i$

$\mathrm{Re}(w^2)$: $a^2 - b^2 = -3$] adderar $\Rightarrow 2a^2 = 2$

$|w^2|$: $a^2 + b^2 = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$ $\quad \Rightarrow a = \pm 1$

$\mathrm{Im}(w^2)$: $2ab = 4 \Rightarrow b = \frac{4}{2a} = \pm 2 \Rightarrow a + bi = \pm(1 + 2i)$

$$x = i + w = i \pm (1 + 2i)$$

Lösningar: $x_1 = -1$, $x_2 = 1 + 3i$, $x_3 = -1 - i$.