UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Jakob Zimmermann

Prov i matematik
Ma kandidat, lärare, fristående
Algebra II, 5 p
2016–xx–xx

Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon, passare och linjal. Lösningarna skall åtföljas av förklarande text. Uppgift 4 ger maximalt 10 poäng alla andra uppgifter maximalt 5. Om inget annat anges så antags alla ringar vara kommutativa ringar med egenskapen att $1 \neq 0$. Notera att uppgifterna är utplacerade i slumpmässig ordning, dvs ordning korresponderar inte nödvändigtvis mot svårighetsgrad.
Skrivtid: *xx.xx–xx.xx.*

1. Faktorisera $(6+2i)\cdot(3-4i)$ i irreducibla faktorer i $\mathbb{Z}[i]$.

2. Låt R vara en kommutativ ring. Ett element $x \in R$ är *nilpotent* om det finns ett heltal $n > 0$ så att $x^n = \prod_{i=1}^{n} x = 0$.

a) Visa att om x är nilpotent så är $x = 0$ eller en nolldelare.

b) Låt $x, y \in R$ nilpotenta element, $r \in R$. Visa att $x + y$ och rx är nilpotent.

c) Låt $x \in R$ vara nilpotent och $u \in R$ inverterbart. Visa att $1 - x$ är inverterbart och dra slutsatsen att $u - x$ är inverterbart.

3. I denna uppgift ska du hitta olika typer av ideal. Självklart ingår det att du måste visa att ditt exempel är ett exempel på den typen av ideal som söks.

a) Hitta ett maximalt ideal i $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

b) Hitta ett primideal i $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ som inte är maximalt.

c) Hitta ett icke-trivialt äkta ideal i $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ som inte är ett primideal.

4. Visa eller motbevisa (t.ex. med hjälp av ett motexempel) följande påståenden

a) Varje integritetsområde är en faktoriell ring.

b) Låt R, S vara ringar och $f : R \to S$ en homomorfism. Då är $\ker(f) = \{x \in R \mid f(x) = 0\}$ ett ideal i R.

c) Mängden av alla udda heltal är ett ideal i $\mathbb{Z}$.

d) Låt R vara en ring och $a \in R$ en nolldelare. Då är a inte inverterbart.

e) Låt R, S vara integritetsområden. Då är $R \times S$ ett integritetsområde.

5. **a)** Visa att $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$ med hjälp av Fermats lilla sats.

b) Visa att $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$ utan Fermats lilla sats.

c) Visa Fermats lilla sats med hjälp av b).

Fortsätter på andra sidan!

6. **a)** Studera $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{C}$ definierad av $f(p(X)) = p(i)$, dvs $p(X)$ utvärderat i i. Visa att f är en surjektiv homomorfism.

b) Visa att $\langle X^2 + 1 \rangle \subset \ker(f)$.

c) Visa att $\ker(f) \subset \langle X^2 + 1 \rangle$.

d) Visa att $\mathbb{R}[X]/\langle X^2 + 1 \rangle \simeq \mathbb{C}$.

7. Hitta alla heltalslösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x \equiv 5 \pmod{3} \\ x \equiv 3 \pmod{7} \\ x \equiv 1 \pmod{8} \end{cases}$$