UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Johan Björklund

Prov i matematik
Ma kandidat, lärare, fristående
Algebra II, 5 p
2008–05–23

Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon, passare och linjal. Lösningarna skall åtföljas av förklarande text. Varje uppgift ger maximalt 5 poäng. Om inget annat anges så antags alla ringar vara kommutativa ringar med egenskapen att $1 \neq 0$.
Skrivtid: *08.00–13.00.*

1. Ordna följande fyra påståenden i en följd så att det första påståendet implicerar det andra, det andra implicerar det tredje osv. R antags vara en ring. Inga bevis krävs.

- R är ett integritetsområde.
- R är en kropp.
- R är euklidisk.
- R är faktoriell.

2. **a)** Existerar det en ring R och en nolldelare $a \in R$ så att a är inverterbar? Exempel eller motbevis.
b) Visa att en ring K är en kropp om och endast om ringen K enbart innehåller två ideal.
c) Givet en godtycklig ring R och två inverterbara element $a, b \in R$, följer det att $a \cdot b$ är inverterbart? Bevis eller motexempel.
d) Givet en godtycklig ring R och två inverterbara element $a, b \in R$, följer det att $a + b$ är inverterbart? Bevis eller motexempel.

3. Faktorisera $(6 + 2i)(3 - 4i)$ i irreducibla faktorer i $\mathbb{Z}[i]$.

4. **a)** Bevisa Fermats lilla sats: givet ett primtal p och ett godtyckligt heltal x så är $x^p - x$ delbart med p.
b) Använd detta för att beräkna $17^{18^{19}} \pmod{19}$.

5. Hitta alla heltalslösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x \equiv 5 \pmod{3} \\ x \equiv 3 \pmod{7} \\ x \equiv 1 \pmod{8} \end{cases}$$

6. Ge definitionen av en ring. Är de udda heltalen en ring med standardaddition/multiplikation?

7. **a)** Studera $f : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}_5$ definierad av $f(a + bi) = \overline{a + 2b}$, dvs $(a + 2b)$:s restklass $\pmod{5}$. Visa att f är en surjektiv homomorfism.
b) Visa att $\ker(f) \subset \langle 2 - i \rangle$. Som vi vet så är $\ker(f) = \{x \in \mathbb{Z}[i] : f(x) = 0\}$.
c) Visa att $\langle 2 - i \rangle \subset \ker(f)$.
d) Använd Noethers första isomorfisats för att visa $\mathbb{Z}[i]/\langle 2 - i \rangle \simeq \mathbb{Z}_5$.

8. Givet ett ideal $I \subset R$ definierar vi $\sqrt{I}$ som mängden av alla element $x \in R$ så att det existerar något $n \in \mathbb{N}$ sådant att $x^n \in I$. Visa att $\sqrt{I}$ är ett ideal.