UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Johan Björklund

Prov i matematik
Ma kandidat, lärare, fristående
Algebra II, 5 p
2009–06–04

Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon, passare och linjal. Lösningarna skall åtföljas av förklarande text. Varje uppgift ger maximalt 5 poäng. Om inget annat anges så antags alla ringar vara kommutativa ringar med egenskapen att $1 \neq 0$.
Skrivtid: *08.00–13.00.*

1. Ordna följande fyra påståenden i en följd så att det första påståendet implicerar det andra, det andra implicerar det tredje osv. R antags vara en ring. Inga bevis krävs.

- R är en huvudidealring.
- R är en kropp.
- R är euklidisk.
- R är faktoriell.

2. **a)** Ge ett exempel på en ickekommutativ ring.

b) Är $\mathbb{Z}_p$ är en kropp då p är ett primtal? Bevis eller motexempel.

c) Är $\mathbb{Z}_n$ någonsin en kropp då $n > 2$ inte är ett primtal? Exempel eller motbevis.

d) Givet en godtycklig ring R och två irreducibla element $a, b \in R$, följer det att $a + b$ är irreducibelt? Bevis eller motexempel.

3. Faktorisera $(2 + 4i)(4 + 3i)$ i irreducibla faktorer i $\mathbb{Z}[i]$.

4. Formulera Fermats lilla sats och använd den för att visa att $(pq)^{r-1} + (qr)^{p-1} + (rp)^{q-1} \equiv 1 \mod pqr$ där p, q, r är parvis olika primtal.

5. Hitta alla heltalslösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x \equiv 7 \pmod{3}, \\ x \equiv 2 \pmod{11}, \\ x \equiv 5^{49} \pmod{8}. \end{cases}$$

6. Betrakta ringarna $R_1 = \mathbb{Z}_9$, $R_2 = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ och $R_3 = \mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2 \rangle$. Finns det något par av dem som är isomorfa? Exempel eller motbevis.

7. Givet en polynomring $K[x]$ där K är en kropp så definierar vi en funktion $D : K[x] \to K[x]$ kallad formell derivering som definieras som följer: $D(kx^n) = nkx^{n-1}, D(p(x)+h(x)) = D(p(x))+D(h(x))$. Exempel: $D(3x^2 + 4) = 6x$.

a) Gäller det att om $D(p(x)) = 0$ så följer det att $p(x) = c$ för något $c \in K$? Bevis eller motexempel.

b) Ge ett nödvändigt och tillräckligt krav på K för att påståendet ovan ska gälla.

8. Givet en ring R definierar vi $\sqrt{0}$ som mängden av alla element $x \in R$ så att det existerar något $n \in \mathbb{N}$ sådant att $x^n = 0$. Visa att $\sqrt{0}$ är ett ideal.
Visa att $\sqrt{0} \subset P$ där vi definierar P som skärningen av alla primideal $P_i \subset R$.