UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Isac Hedén

Prov i matematik
KandMat1, Frist
Algebra II, 5 hp
2011–06–01

Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon, passare och linjal. Lösningarna skall åtföljas av förklarande text. Varje uppgift ger maximalt 5 poäng. Om inget annat anges så antags alla ringar vara kommutativa ringar med egenskapen att $1 \neq 0$.
Skrivtid: *08.00–13.00.*

1. Låt R vara en ring. Ordna följande påståenden så att det första medför det andra, det andra medför det tredje osv.

- R är faktoriell.
- Varje nollskilt element i R är inverterbart.
- Produkten av två element i R blir noll endast om en av elementen är noll.
- R är euklidisk.

2. **a)** Vad är inversen till 8, om den existerar, i ringen $\mathbb{Z}_{17}$?

b) Givet en ring R och två inverterbara element $a, b \in R$, följer det att ab^{-1} är inverterbart?

c) Givet ett integritetsområde R, gäller det att $ax = ay$ medför $x = y$ om $a \neq 0$?

d) Ge exempel på en ring R och element $x, y \in R$ sådana att $ax = ay$ för något nollskilt $a \in R$, men $x \neq y$.

e) Låt $R = C^0(\mathbb{R})$ vara ringen av kontinuerliga funktioner från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$. Visa att

$$I := \{f \in C^0(\mathbb{R}) \mid f(3) = 0\}$$

är ett ideal i R.

3. Låt ϕ beteckna Eulers ϕ-funktion.

a) Formulera Eulers sats (bevis krävs ej).

b) Beräkna $\phi(136)$.

c) Förenkla $19^{65} \pmod{136}$, dvs. bestäm den minsta positiva resten då 19^{65} divideras med 136.

d) Visa att $17^{64} \not\equiv 1 \pmod{136}$. Bryter detta mot Eulers sats?

e) Hitta alla nollställen i $\mathbb{Z}_{13}$ till polynomet $x^{13} + 12x \in \mathbb{Z}_{13}[x]$.

4. Hitta alla heltalslösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x \equiv 0 \pmod{4}, \\ x \equiv 1 \pmod{9}, \\ 8x \equiv 1 \pmod{17}. \end{cases}$$

5. Faktorisera $140 + 245i$ i irreducibla faktorer i $\mathbb{Z}[i]$.

Vänd!

6. Låt $\alpha \in \mathbb{Z}[i] \setminus \{0\}$ vara ett icke-inverterbart element, så att $\langle \alpha \rangle \subset \mathbb{Z}[i]$ är ett nollskilt äkta huvudideal.

a) Visa att $\mathbb{Z}[i]/\langle \alpha \rangle$ är en ring med ändligt många element.

b) Eftersom irreducibla element i huvudidealringar genererar maximala ideal, är $\mathbb{Z}[i]/\langle \alpha \rangle$ en kropp när α är irreducibelt. Låt $\alpha := 1 + 2i \in \mathbb{Z}[i]$; då är α irreducibelt, och $\mathbb{Z}[i]/\langle 1 + 2i \rangle$ en kropp. Hur många element har denna kropp, och vilken är dess karaktäristik?

c) Låt $\beta := i + \langle 1 + 2i \rangle \in \mathbb{Z}[i]/\langle 1 + 2i \rangle$ beteckna den restklass som innehåller elementet i. Visa att $1 + \beta \neq 0$ i $\mathbb{Z}[i]/\langle 1 + 2i \rangle$, och beräkna $(1 + \beta)^{-1}$.

7. Betrakta ringarna $\mathbb{Z}[i]/\langle 3 \rangle$, $\mathbb{Z}_9$ och $\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2 - 1 \rangle$. Finns det något par av dem som är isomorfa? Bevis eller motexempel.

8. Låt R vara en ring där varje element $x \in R$ uppfyller $x^n = x$ för något heltal $n > 1$ (n kan bero på x). Visa att varje primideal i R är ett maximalideal.