UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Seidon Alsaody
018–471 32 81, 073–990 96 58

Prov i matematik
KandMat, Fristående
Algebra II
2013–06–07

Skrivtid 5 timmar. Hjälpmedel: skrivdon. Provet består av 8 uppgifter, om vardera 5 poäng. ***OBS!*** *Om Du har läst kursen under VT2013 ska Du endast lösa uppgift 1–6, och Du ska ha gjort en muntlig redovisning. Om Du har läst kursen tidigare löser Du alla uppgifter. För betygen 3, 4 och 5 krävs 18, 25 resp. 32 poäng, inklusive poäng från redovisning och seminarier. Lycka till!*

1. a) Ge ett exempel på en icke-kommutativ ring.
b) Ge ett exempel på en kommutativ ring som inte är ett integritetsområde.
c) Ge ett exempel på en Euklidisk ring som inte är en kropp.
d) Ge ett exempel på ett irreducibelt polynom i $\mathbb{Z}[X]$ av grad 2.
e) Formulera Eulers sats.

Inga bevis krävs ovan.

2. Finn alla heltal som vid division med varje $k \in \{3, 4, 5\}$ ger samma rest som $(60/k) - 1$.

3. Låt R vara ett integritetsområde.

a) Vad menas med att ett ideal i R är *maximalt*? Återge definitionen.
b) Vad menas med att ett element i R är *irreducibelt*? Återge definitionen.
c) Låt $I \subseteq R$ vara ett nollskilt maximalt ideal som genereras av ett element, dvs $I = \langle a \rangle$ för något $a \in R$. Visa att a är nollskilt och irreducibelt.

4. Bestäm alla $a \in \mathbb{Z}[i]$ associerade till $255i$. Faktorisera sedan $255i$ i irreducibla faktorer i $\mathbb{Z}[i]$. *Ledning: använd något associerat element.*

5. Låt R vara en kommutativ ring.

a) Visa att funktionen $f : R \times R \to R$, $(a, b) \mapsto b$, är en ringhomomorfism.
b) Visa att kärnan av f är $R \times \{0\}$, dvs $\{(a, b) \in R \times R \mid b = 0\}$.
c) Visa att $(R \times R)/(R \times \{0\}) \simeq R$.

6. Låt M vara en ändlig mängd, och betrakta mängden $\mathcal{P}(M)$ av alla delmängder av M. Vi kan definiera addition och multiplikation på $\mathcal{P}(M)$ så att den blir en kommutativ ring, nämligen genom att definiera $A + B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ och $A \cdot B = A \cap B$, för alla delmängder A och B av M.

a) Vad är nollan och ettan i denna ring?
b) Antag att $|M| > 1$. Visa att $\mathcal{P}(M)$ inte är ett integritetsområde.
c) Antag att $|M| = 1$. Vilka element har $\mathcal{P}(M)$? Visa att $\mathcal{P}(M) \simeq \mathbb{Z}_2$.

Problem 7 och 8 ska endast lösas av den som ***inte*** *läst kursen den här terminen och som skriver denna tentamen som omtentamen.*

7. a) Beräkna produkten av alla nollskilda element i $\mathbb{Z}_6$ respektive $\mathbb{Z}_9$.

b) Låt $n > 4$ vara ett heltal som inte är ett primtal. Visa att produkten av alla nollskilda element i $\mathbb{Z}_n$ är noll.

8. a) Formulera Fermats lilla sats, utan bevis.

b) Finn alla rötter i $\mathbb{Z}_7$ till polynomet $X^7 - X \in \mathbb{Z}_7[X]$, och faktorisera polynomet i irreducibla faktorer.