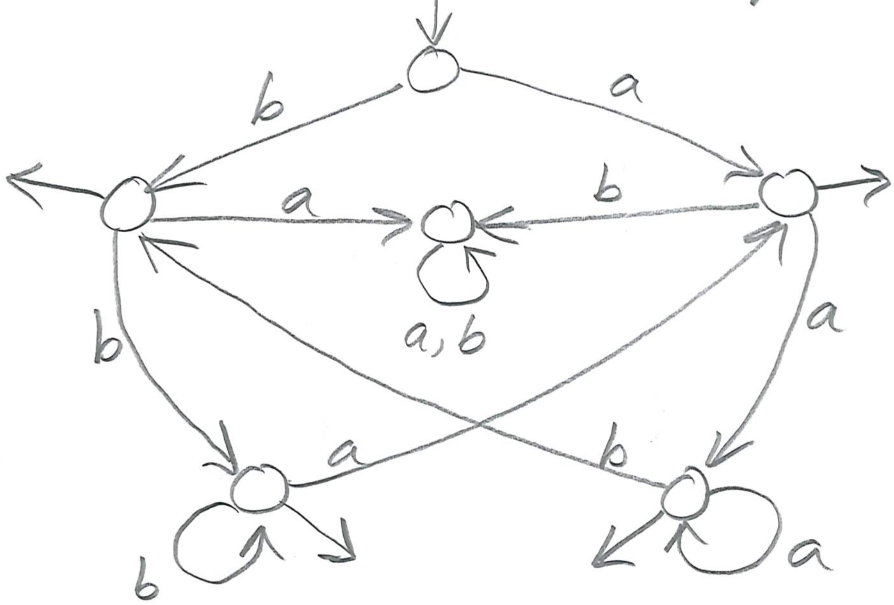
Automatateori 2022-08-18

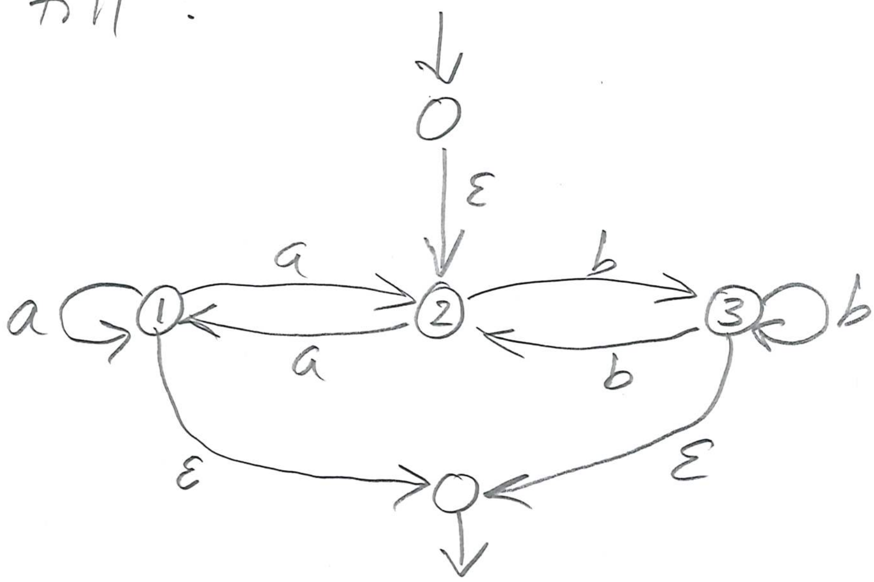
1

Svar eller, ofta ofullständiga, lösningsförslag.

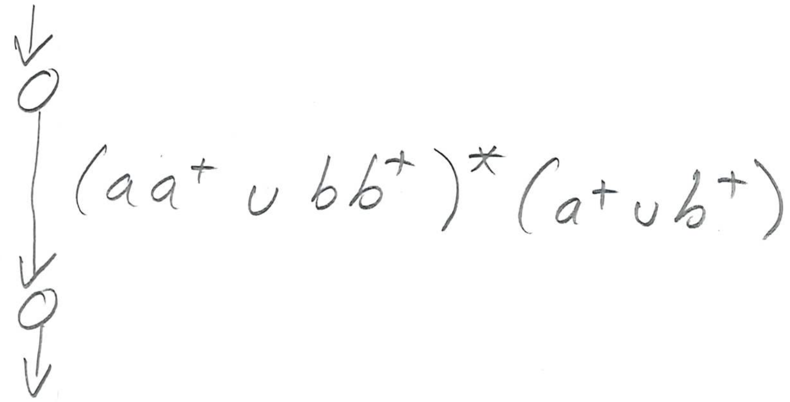
1. En DFA som accepterar samma språk som NFA:n i uppgiften:



2. Nytt start- och accepterande tillstånd läggs till:

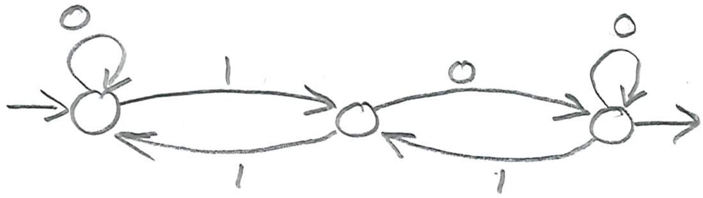


Om tillstånd 1 elimineras först, sedan tillstånd 2 och sist 3 så får man GFA:n



så uttrycket på den kvarvarande övergången är ett reguljärt uttryck för NFA:ns språk, där $a^+ = aa^* = a^*a$.

3. Minimal DFA:



4. Språket L_1 är <u>inte</u> reguljärt. Eftersom reguljära språk är slutna under komplement så räcker det att visa att $\overline{L_1} = \{w \in \{a,b\} : w = w^{rev}\}$ <u>inte</u> är reguljärt.

Låt $A = \{a^n b : n \in \mathbb{N}\}$, så A är oändlig. Antag att $x, y \in A$ och $x \neq y$. Då följer att det finns

$n, m \in \mathbb{N}$, där $n \neq m$, så att $x = a^n b$ och $y = a^m b$. Om $z = a^n$ så $xz = a^n b a^n \in \overline{L_1}$ och $yz = a^m b a^n \notin \overline{L_1}$ eftersom $m \neq n$. Det följer att den oändliga mängden A särskiljs av L och det följer från särskiljandesatsen att $\overline{L_1}$ <u>inte</u> är reguljärt.

L_2 är reguljärt för

$L_2 = \{w \in \{a,b\}^* : w \neq \varepsilon\}$ och detta språk har det reguljära uttrycket

$(a \cup b)(a \cup b)^*$ (eller $(a \cup b)^+$).

För om $w \in \{a,b\}^*$ och $w \neq \varepsilon$ så kan vi låta $u = w$ och $v = \varepsilon$ vilket ger $w = uv \in L_2$ eftersom $u \neq v$. Och omvänt, om $u \neq v$ så $uv \neq \varepsilon$ eftersom $u \neq v$ implicerar att $u \neq \varepsilon$ eller $v \neq \varepsilon$.

5. ababb accepteras.

Körning:

kvar på tapen	stacken	tillstånd
ababb	ε	vänstra
babb	c	vänstra
abb	cc	vänstra
bb	cc	högra
b	c	högra
ε	ε	högra

Eftersom det högra tillståndet är accepterande och stacken tom när hela strängen har avlästs så accepteras strängen.

abbbb accepteras inte och förklaring följer i del (b).

(b) För att kunna komma till det accepterande tillståndet och få tom stack när hela input-strängen har avlästs så måste det finnas ett 'a' sådant att lika många tecken kommer före detta 'a' som efter det. Med andra ord accepteras endast strängar över $\{a,b\}$ med udda längd och ett 'a' i mitten. Språket kan också beskrivas så här:

$$\{uav : u,v \in \{a,b\}^* \text{ och } |u| = |v|\}.$$

(c)

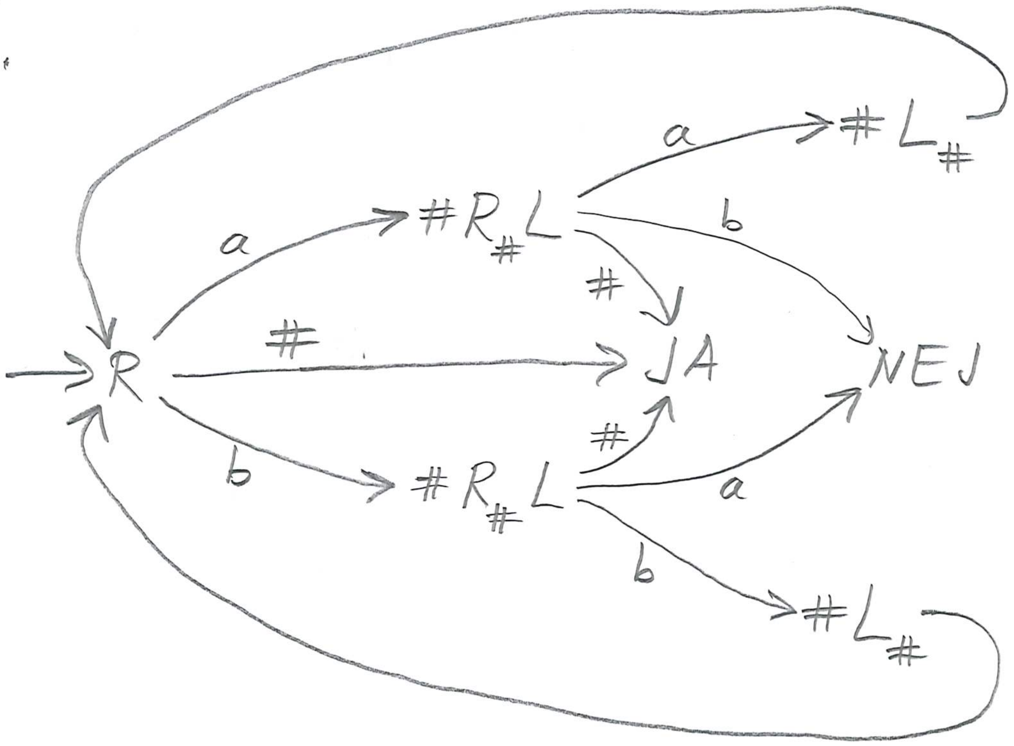
$$S \rightarrow TST \mid a$$
$$T \rightarrow a \mid b$$

6. (a)

#11111	#11#1
11111	11#1
#1111	#1#1
1111	1#1
#111	1#1#
111#	1#11
111##	1#11
111#1	#1#11
111#1	1#11
#111#1	##11
111#1	#11 terminerar

(b) Turingmaskinen beräknar heltalskvoten vid division med 2, dvs $f(x) = $ heltalsdelen av $\frac{x}{2}$, så t.ex. $f(0)=0$, $f(1)=0$, $f(2)=1$, $f(3)=1$, $f(4)=2$, $f(5)=2$, ...

7.



8. L_4 är sammanhangsfritt men inte reguljärt. En CFG för L_4 är tex.

$S \to aSa \mid bSb \mid aaa$

Eftersom tex. $A = \{ b^n aaa : n \in \mathbb{N} \}$ särskiljs av L_4 så är L_4 inte reguljärt.

L_3 är inte sammanhangsfritt och därmed inte heller reguljärt.
Man kan visa detta med pumpsatsen för sammanhangsfria språk, vilket nu skissas. Låt K vara givet av pumpsatsen för sammanhangsfria språk och välj $w = ab^{K+1}ab^{K+1}b^{K+1}a$, så $w \in L_3$ och $|w| \geq K$.
Men om $w = uvxyz$, $|vxy| \leq K$ och $vy \neq \varepsilon$ så $uv^0xy^0z = uxz \notin L_3$.
Detta pga tecken från högst två av delsträngarna ab^{K+1}, ab^{K+1} och $b^{K+1}a$ har försvunnit i uxz.

9. (a) L_5 är TM-accepterbart för om $\mathcal{U}$ är den universella TM:en så kan man, för en godtycklig TM M, ge K_M och 010101 so input till $\mathcal{U}$ (dvs starta $\mathcal{U}$ i konfigurationen $\underline{\#}K_M\#010101$). Om M accepterar 010101 så stannar $\mathcal{U}$ och i annat fall så stannar inte $\mathcal{U}$.

(b) L_5 är <u>inte</u> TM-avgörbart villket kan visas med Rices sats.
Låt $\Omega = \{L : L$ är ett TM-accepterbart språk och $010101 \in L\}$.
Per definition så innehåller Ω bara TM-accepterbara språk. Språket $L=\{010101\}$ har det reguljära uttrycket 010101 så det är reguljärt och därmed TM-accepterbart och innehåller 010101 så $L \in \Omega$. Men tex språket

$L = \emptyset$ är TM-accepterbart och innehåller inte 010101 så $L \notin \Omega$. Så Ω innehåller något, men inte alla, TM-accepterbara språk och enligt Rices sats är L_5 inte TM-avgörbart.

(c) Om $\overline{L_5}$ vore TM-accepterbart så skulle det följa (eftersom L_5 är TM-accepterbart enligt del (a)) att L_5 är TM-avgörbart vilket motsäger del (b). Så $\overline{L_5}$ är inte TM-accepterbart.