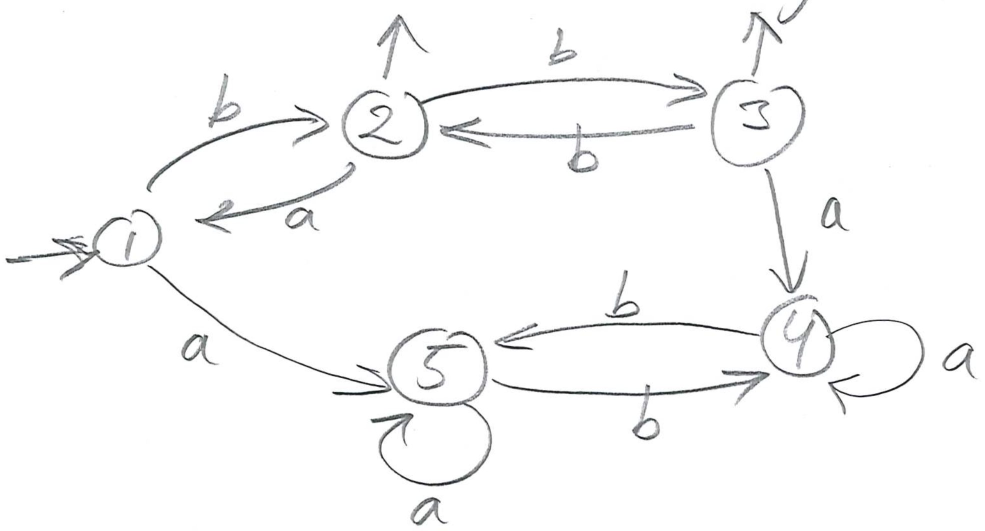
Automatateori 2022-10-24

Svar/lösningsförslag

1. Om tillstånden namnges så här



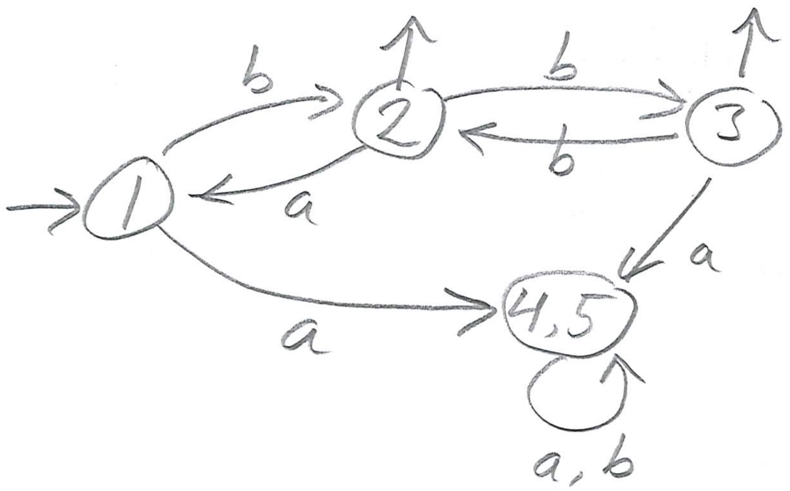
så får man övergångstabellen

	1	2	3	4	5
a	5	1	4	4	5
b	2	3	2	5	4

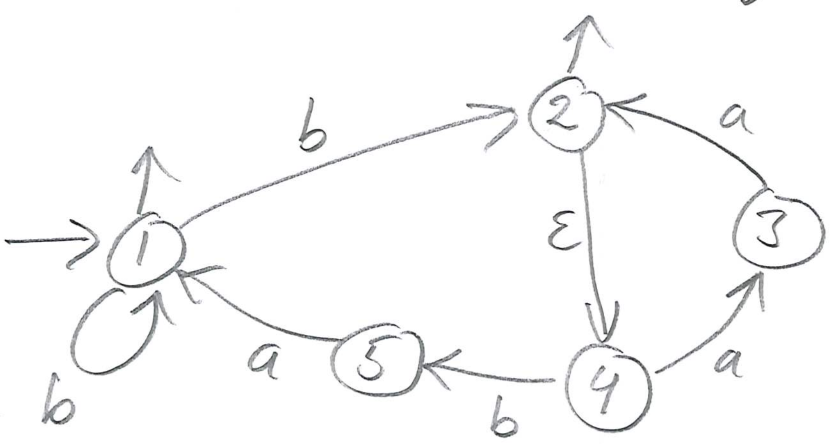
Sedan används särskiljandealgoritmen.

nivå	sönderdelning	
1	{1, 4, 5} {2, 3}	accept. och icke-accept särskiljs.
2	{1} {4, 5} {2, 3}	b driver DFA:n från 1 till 2 och från 4 till 5.
3	{1} {4, 5} {2} {3}	a driver DFA:n från 2 till 1 och från 3 till 4.
4	{1} {4, 5} {2} {3}	inga skäl till ytterligare sönderdelning finns.

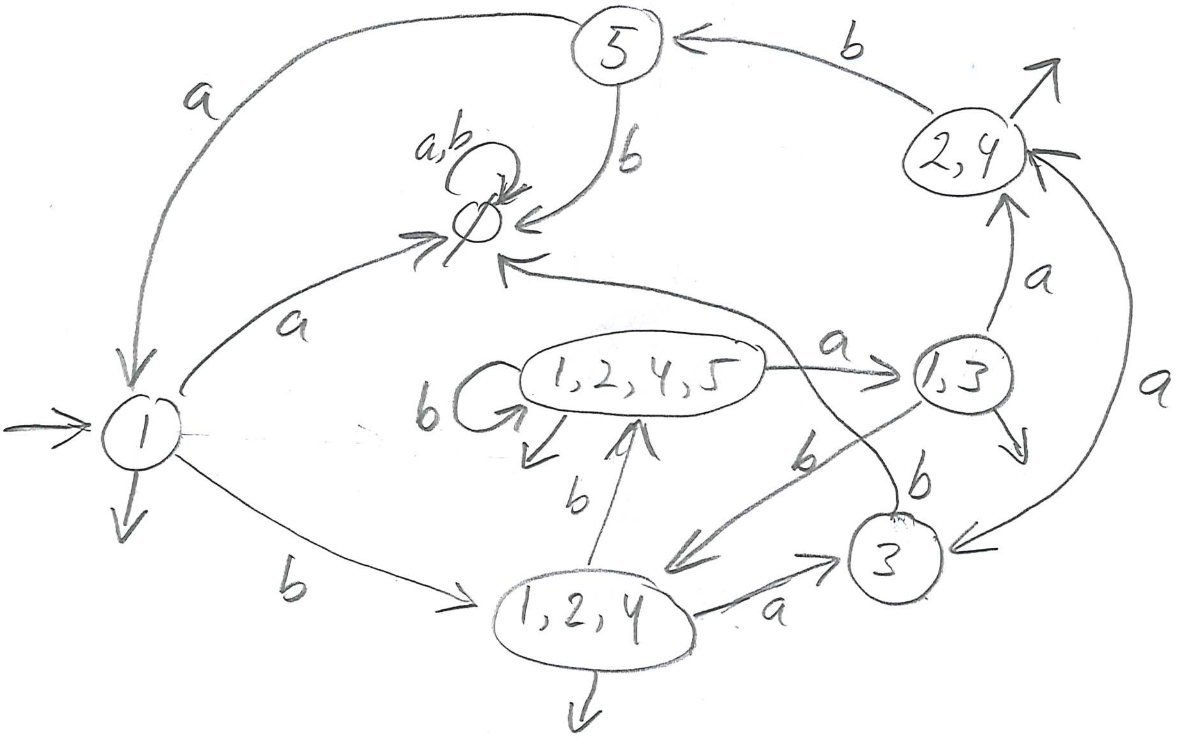
Vi får en minimal DFA genom att "slå ihop" 4 och 5:



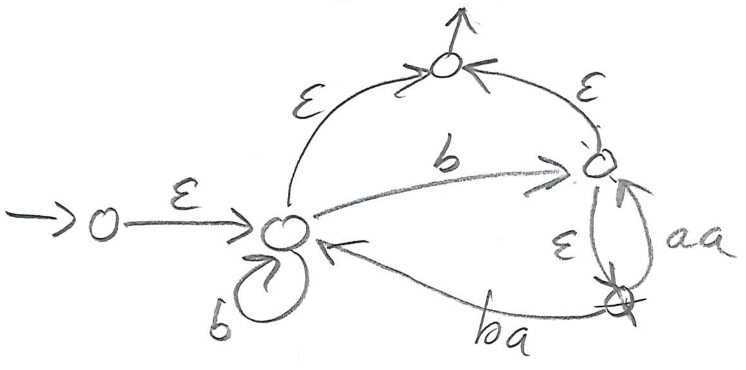
2. Först görs NFA:n icke-glupsk och tillstånden namnges:



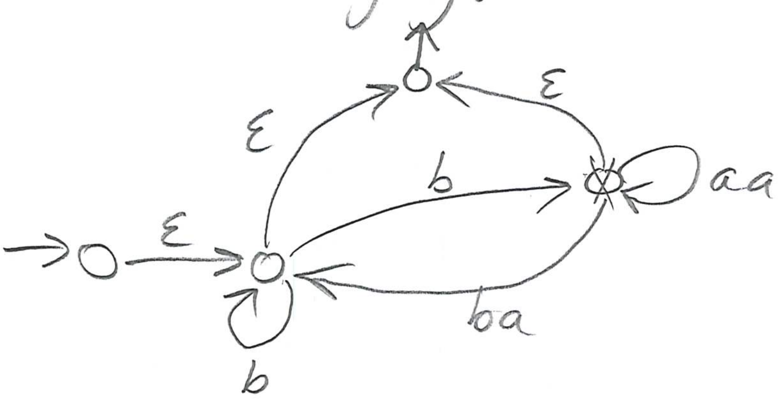
Sedan används delmängdsalgoritmen:

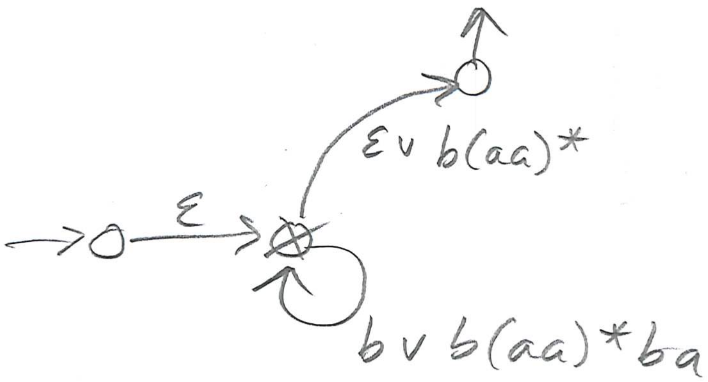


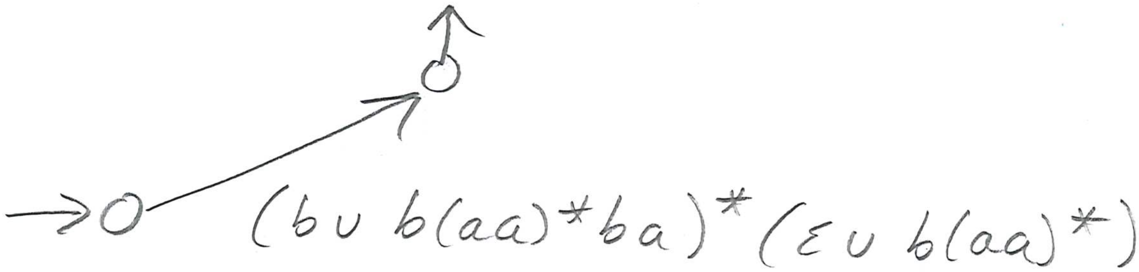
3. Först läggs nytt start- och accepterande tillstånd till:



Sedan elimineras de gamla tillstånden, ett för ett, och jag gör förenklingar när det är möjligt:







Det sista reguljära uttrycket beskriver NFA:ns språk.

4. L_1 är reguljärt. Det räcker att visa att $\overline{L_1}$ är reguljärt för då är även $\overline{\overline{L_1}} = L_1$ reguljärt.

$\overline{L_1} = \{w \in \Sigma^* : \text{summan av } w \text{ är högst } 6\}$ och de enda strängarna vars summa är högst 6 är ε, 2, 3, 22, 23, 32, 33 och 222. Så

$$\varepsilon \cup 2 \cup 3 \cup 22 \cup 23 \cup 32 \cup 33 \cup 222$$

är ett reguljärt uttryck för $\overline{L_1}$.

5

L_2 är inte reguljärt.

Bevis med särskiljandesatsen:

Låt $A = \{ 2^{3n} : n \in \mathbb{N} \}$.

Eftersom A är oändlig så räcker det att visa att A särskiljs av L_2.

Så antag att $x, y \in A$ och $x \neq y$.

Vi visar att det finns z så att exakt en av xz och yz tillhör L_2.

Antagandet medför att det finns $i \neq j$ så att $x = 2^{3i}$ och $y = 2^{3j}$.

Vi kan anta att $i > j$, för om $j < i$ så resonerar vi på liknande sätt.

Låt $z = 3^{2i}$. Då är både 2-summan av xz och 3-summan xz lika med $2 \cdot 3 \cdot i$, så de är lika och $xz \in L_2$.

Men 2-summan av yz är $2 \cdot 3 \cdot j$ vilket är mindre (eftersom $i > j$) än $2 \cdot 3 \cdot i$ som är 3-summan av yz, så $yz \notin L_2$.

Om man använder pumpsatsen så kan man välja $u = \varepsilon$, $w = 2^{3N}$, $v = 3^{2N}$ och "pumpa ur" w. (där N ges av pumpsatsen).

5. (a) Strängen babadc kan produceras:

$S \Rightarrow UV \Rightarrow AUBV \Rightarrow AAUBBV \Rightarrow$
$\Rightarrow AABBV \Rightarrow AABBCVD \Rightarrow AABBCD$
$\Rightarrow ABABCD \Rightarrow BAABCD \Rightarrow BABACD$
$\Rightarrow BABADC \overset{*}{\Rightarrow} babadc.$

Strängen ababcdd kan inte produceras för reglerna skapar alltid lika många C som D och c och d kan bara fås från C, respektive D.

(b) Grammatikens språk är:

$\{uv : u \in \{a,b\}^*, v \in \{c,d\}^*,$ u har lika många a som b och v har lika många c som d. $\}$

6. (a) Körning:

#baabba
baabba
#aabba
aabba
#abba
abba#
abba##
abba#1

abba#1
#abba#1
abba#1
#bba#1
bba#1
bba#1#
bba#11
bba#11

#bba#11
bba#11
#ba#11
ba#11
#a#11
a#11
##11
#11
11#

111
#111
##111
#111 stannar

Om TM:en startas i tapekonfigurationen $\underline{\#}w$ (där $w \in \{a,b\}^*$) så stannar den i tapekonfigurationen $\underline{\#}1^n$ där n är antalet 'a' i w.

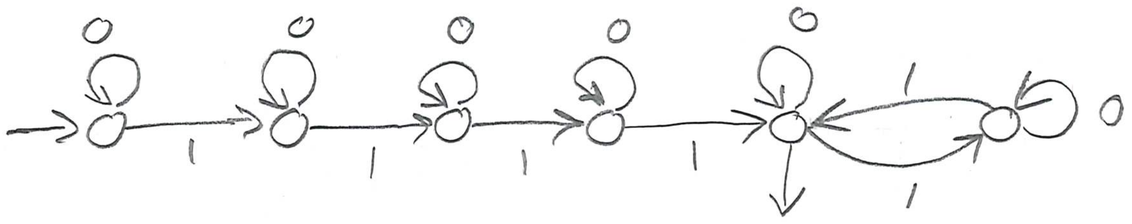
(b) Språket som avgörs av den modifierade TM:en är
$\{w \in \{a,b\}^* :$ antalet 'a' i w är jämnt$\}$.

7. En sträng $w \in \{0,1\}^*$ tillhör L_3 om den innehåller 0, 1 eller 4 ettor så ett reguljärt uttryck för L_3 är

$$0^* \cup 0^*10^* \cup 0^*10^*10^*10^*10^*$$

och därmed är L_3 reguljär och därmed sammanhangsfri.

L_5 är reguljär och därmed sammanhangsfri för L_5 accepteras av följande DFA:



L_4 är <u>inte</u> sammanhangsfri och därmed <u>inte</u> reguljär. Bevis:

1. Eftersom $1^{n^2} \in L_4$ för alla $n \geq 2$ så är L_4 oändlig.
2. Antag att L_4 är en CFL.
3. Låt K vara given för L_4 av pumpsatsen för CFL.
4. Välj $w = 1^{(K+2)^2}$, så $w \in L_4$ och $|w| \geq K$.
5. Antag att $w = uvxyz$, $|vxy| \leq K$ och $vy \neq \varepsilon$. Låt $m = |vy|$, så $0 < m \leq K$. Vi får $uv^2xy^2z = 1^{(K+2)^2+m}$ och

$$\begin{aligned}(K+2)^2 < (K+2)^2 + m &= K^2 + 4K + 4 + m \\ &\leq K^2 + 4K + 4 + K = K^2 + 5K + 4 \\ &< K^2 + 6K + 9 = (K+3)^2.\end{aligned}$$

Det följer att uv^2xy^2z <u>inte</u> innehåller exakt n^2 ettor för något $n \geq 2$, så $uv^2xy^2z \notin L_4$.

6. Punkt 5 motsäger pumpsatsen för CFL så L_4 kan inte vara en CFL.

8. (a) Nej, en sådan TM finns inte och vi visar det med Rices sats.

Låt $\Omega = \{L : L$ är ett TM-accepterbart språk och alla strängar i L slutar på 'a'$\}$.

Från definitionen följer direkt att alla språk i Ω är TM-accepterbara.

Språket $\{a\}$ är reguljärt (med reguljärt uttryck a) och därmed TM-accepterbart och alla strängar i $\{a\}$ slutar på 'a'. Så Ω är icketom.

Språket $\{b\}$ är reguljärt och därmed TM-accepterbart och någon sträng i $\{b\}$ slutar <u>inte</u> på 'a'. Så $\{b\}$ tillhör <u>inte</u> Ω.

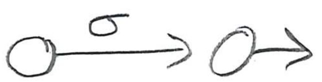
Från Rices sats följer att ingen TM kan avgöra, för godtycklig TM M, om $L(M) \in \Omega$, dvs om alla strängar i $L(M)$ slutar på a.

(b) Det finns en TM som avgör problemet. Enligt Church-Turings tes räcker det att informellt beskriva en algoritm som avgör problemet.

Algoritm

Input: En NFA M.

Omvandla först, med delmängdskonstr., M till en DFA N så att $L(N) = L(M)$.
Då kommer N (pga sin konstruktion) **inte** ha något isolerat tillstånd.
Titta på alla övergångar till samtliga accepterande tillstånd



Om tecknet σ på varje sådan övergång är 'a' så kommer $L(N)$ bara innehålla strängar som slutar på 'a' och algoritmen ger 'ja' som output.
Annars innehåller $L(M)$ minst en sträng som inte slutar på 'a' och algoritmen ger 'nej' som output.

9. Se Sats 2.3 i kursboken, samt dess följdsats och bevisen av dessa.