UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Bo Styf, 471 3192, 0707-253107

Prov i matematik
Baskurs i matematik
2008–03–08

Skrivtid: Fem timmar med start 10.15 – 11.15. Tillåtna hjälpmedel: Manuella skrivdon. Varje uppgift är värd 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 respektive 32 poäng. Påbörja varje uppgift på nytt papper och skriv endast på papperets ena sida. Lös ej problem 1 om du klarade duggan.

1. (a) Ange en ekvation för den räta linjen genom punkterna $(-1, 2)$ och $(0, -3)$
(b) Bestäm en ekvation för cirkeln som går genom $(0, -3)$ och har centrum i $(-1, 2)$.
(c) Bestäm centrum och halvaxlar för ellipsen som ges av $x^2 + 3y^2 + 6y = 6$.

2. Lös ekvationen
$$(16^x + 4^x - 6)(\log_9(6 - x) - \log_3 x) = 0$$

3. Lös olikheten $|3x + 4| < |2x + 1|$.

4. (a) Lös ekvationen $1 - 2\sin(x + \pi) = 0$
(b) Lös ekvationen $2\sin^2(2x) + 3\cos(4x) = 0$.

5. (a) Ange en polär representation av talet $z = \dfrac{(1-i)^2(1+i\sqrt{3})}{(\sqrt{3}-i)^2}$.
(b) Lös ekvationen $z^3 = 4\sqrt{2}(i - 1)$.

6. Visa, t.ex med induktion, att $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{n}{2n+1}$, för varje heltal $n \geq 1$.

7. (a) I en turnering deltar 9 lag. Varje lag skall möta varje annat lag i två matcher. Hur många matcher skall spelas?
(b) Hur många av heltalen mellan 1000 och 9999 innehåller exakt två tvåor?

8. (a) Beräkna kvoten och resten då $x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 12x + 9$ divideras med $x^2 - 4x + 5$.
(b) Ekvationen $z^4 - 4z^3 + 8z^2 - 12z + 15 = 0$ har en rot av formen bi (där b är reellt). Lös ekvationen.

Svar till tentamen i 2008–03–08

1. (a) Tvåpunktsformeln ger

$$y = 2 + \frac{-3-2}{0-(-1)}(x+1) = 2 - 5x - 5 = -5x - 3$$

(b) Cirkeln har radien $R = \sqrt{(0-(-1))^2 + (-3-2)^2} = \sqrt{26}$. Alltså har cirkeln har en ekvation

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 26$$

(c) Kvadratkomplettering ger $6 = x^2 + 3(y^2 + 2y) = x^2 + 3(y+1)^2 - 3$, alltså $9 = (x-0)^2 + 3(y+1)^2$. Av detta utläser vi att ellipsen har centrum i $(0, -1)$ och halvaxlarna $a = 3$, $b = \sqrt{3}$.

2. Ekvationen har lösningarna x, sådana att endera $16^x + 4^x - 6 = 0$ eller $\log_9(6-x) = \log_3 x$. I det första fallet låter vi $u = 4^x$. Då gäller att $16^x = (4^x)^2 = u^2$, $\Rightarrow 0 = u^2 + u - 6 = (u-2)(u+3) = (4^x - 2)(4^x + 3)$ med enda lösningen $x = \dfrac{1}{2}$. I det andra fallet sätter vi $v = \log_3 x$ och får $6 - x = 9^v = (3^v)^2 = x^2$, dvs $0 = x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$ med rötterna $x = 2$ och $x = -3$. Den sista roten är falsk så ekvationen har alltså rötterna $\dfrac{1}{2}$ och 2.

3. Genom kvadrering fås den ekvivalenta olikheten $(3x+4)^2 < (2x+1)^2$, vilken hyfsas till $0 > x^2 + 4x + 3 = (x+3)(x+1)$. Lösningen består alltså av alla x för vilka $x+3$ och $x+1$ har olika tecken. Alltså $x + 1 < 0 < x + 3$, dvs $-3 < x < -1$.
Alternativt gör vi en fallindelning: Låt $v = 3x + 4$, $h = 2x + 1$. Om $x \leq -4/3$ gäller $|v| = -v$ och $|h| = -h$ så olikheten kan skrivas $-v < -h$ eller $0 < v - h = x + 3$, med lösningen $-3 < x \leq -4/3$. Om $-4/3 \leq x \leq -1/2$ gäller $|v| = v$ och $|h| = -h$ så olikheten kan skrivas $v < -h$ eller $0 > v + h = 5x + 5$, med lösningen $-4/3 \leq x < -1$. Om, slutligen, $-1/2 \leq x$ gäller $|v| = v$ och $|h| = h$ så olikheten kan skrivas $v < h$ eller $0 > v - h = x + 3$, med lösningen $-1/2 \leq x < -3$, vilket är orimligt, så vi har inga lösningar i detta fall. Sammantaget har därför olikheten $|v| < |h|$ lösningen $-3 < x < -1$.

4. (a) Då $\sin(x+\pi) = -\sin x$ kan ekvationen skrivas $\sin x = -\dfrac{1}{2}$. Lösningarna är därför $x = -\pi/6 + 2\pi n$ och $x = 7\pi/6 + 2\pi n$ (n heltal). Alternativt har vi ekvationen $\sin(x+\pi) = \dfrac{1}{2}$, med lösningarna $x + \pi = \pi/6 + 2\pi n$ och $x + \pi = 5\pi/6 + 2\pi n$, dvs $x = -5\pi/6 + 2\pi n$ och $x = -\pi/6 + 2\pi n$ (samma lösningar!).

(b) Formlerna för dubbla vinkeln ger $2\sin^2(2x) = 1 - (1 - 2\sin^2(2x)) = 1 - \cos 4x$. Ekvationen kan därför skrivas $1 + 2\cos 4x = 0$ eller $\cos 4x = -1/2$. Lösningarna ges därför av $4x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n$ (n heltal). Alltså $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{2}n$.

5. (a) Vi har $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$, $1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$, $\sqrt{3} - i = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$, $\Rightarrow$

$$z = (\sqrt{2})^2(2)(2)^{-2}\exp\left[i\pi\left(-\frac{2}{4} + \frac{1}{3} + \frac{2}{6}\right)\right] = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{6}}$$

Enklast är dock kanske att först beräkna z på formen $a + bi$:

$$z = \frac{(-2i)(1+i\sqrt{3})(\sqrt{3}+i)^2}{(\sqrt{3}-i)^2(\sqrt{3}+i)^2} = \frac{2(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)^2}{16} = \frac{\sqrt{3}+i}{2} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{6}}$$

(b) Låt $z = r\,e^{i\theta}$. Då $4\sqrt{2}(i-1) = 8e^{i\frac{3\pi}{4}}$ kan ekvationen skrivas $r^3 e^{i3\theta} = 8e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $\Rightarrow r^3 = 2^3$, $3\theta = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n$. $\Rightarrow r = 2,\ \theta = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2\pi}{3}n$. Tre konsekutiva n-värden, exempelvis $n = -1,\ 0,\ 1$, ger de tre rötterna.

6. Detta är första exemplet i ”Exempel på induktionsbevis” (se kurshemsidan). Alternativt kan man utnyttja omskrivningen

$$\frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$$

vilket ger

$$2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}$$

varur resultatet följer.

7. (a) En match svarar mot en delmängd med två element ur en mängd med nio element. Antalet sådana delmängder är $\dfrac{9\cdot 8}{2\cdot 1} = 36$. Man skall alltså spela $2\cdot 36 = 72$ matcher.

(b) Antalet sådana tal med en tvåa som första siffra är $3\cdot 9\cdot 9 = 243$ (3 platser för den 2:a tvåan och 9 siffror att välja på för vardera av de två återstående platserna). Antalet sådana tal där den första siffran ej är en tvåa är $8\cdot 3\cdot 9 = 216$ (8 siffror att välja på som första siffra, 3 platser för icke-tvåan och 9 siffror att välja mellan där). Totalt finns alltså $243 + 216 = 459$ tal med exakt två tvåor.

8. (a) En polynomdivision ger

$$\frac{x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 12x + 9}{x^2 - 4x + 5} = x^2 + 3 - \frac{6}{x^2 - 4x + 5}$$

eller

$$x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 12x + 9 = (x^2+3)(x^2-4x+5) - 6$$

så kvoten är $x^2 + 3$ och resten är -6.

(b) Av ovanstående division framgår att $z^4 - 4z^3 + 8z^2 - 12z + 15 = (z^2+3)(z^2-4z+5)$. Rötterna till den givna ekvationen är därför $z = \pm i\sqrt{3}$ (båda av formen bi) samt $z = 2 \pm \sqrt{4-5} = 2 \pm i$. Vill man inte utnyttja (a) kan man i stället sätta in $z = bi$ i ekvationen. Man får då $0 = b^4 + 4ib^3 - 8b^2 - 12bi + 15$, vilket ger $0 = b^4 - 8b^2 + 15$ och $0 = 4b^3 - 12b = 4b(b^2-3)$. Båda dessa ekvationer är uppfyllda om och endast om $b^2 = 3$. Polynomet är därför delbart med $z^2 + 3$. Man får, precis som ovan, att $z^4 - 4z^3 + 8z^2 - 12z + 15 = (z^2+3)(z^2-4z+5)$ osv. Alternativt kan man använda det faktum att $z^4 - 4z^3 + 8z^2 - 12z + 15$ är delbart med $z^2 + b^2$. Genom att pröva sig fram (eller göra en polynomdivision) får man

$$z^4 - 4z^3 + 8z^2 - 12z + 15 = (z^2 + b^2)\left(z^2 - 4z + \frac{15}{b^2}\right) = z^4 - 4z^3 + \left(b^2 + \frac{15}{b^2}\right)z^2 - 4b^2 z + 15$$

vilket ger $4b^2 = 12$ och $b^2 + 15/b^2 = 8$, som båda är uppfyllda precis då $b^2 = 3$ osv.