UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Gunnar Berg & Staffan Rodhe

Prov i matematik
Baskurs i matematik

ES1,IT1,W1,KandData1
K1,STS1,X1,KandKe1
2011-01-15

Skrivtid: 14-19. Tillåtna hjälpmedel: skrivdon. Poäng: varje uppgift ger maximalt 1 poäng på A-delen, 2 poäng på B-delen och 5 poäng på C-delen. För Godkänd fordras minst 18 poäng, för betyget fyra minst 25 poäng och för betyget fem minst 32 poäng. **På B-och C-delarna accepteras endast välskrivna och tydliga lösningar för rättning.**

A-del. (Endast svar krävs!)

1. Förenkla uttrycket
$$\frac{x^2-x}{x^2-1}.$$
2. Bestäm värdet av $\sin(-\pi/6)$.
3. För vilka x gäller $2-2x>1$?
4. Bestäm beloppet av det komplexa talet $3-5i$.
5. Om $\log_a 49=2$, vad är a ?
6. Ge ekvationen för en cirkel med medelpunkt i $(-5,2)$ och radie 3.
7. Bestäm alla lösningar till ekvationen $\cos x+1=0$.
8. Vilka reella tal uppfyller $|x+1|=3$?

B-del. (Fullständiga lösningar krävs!)

9. Lös olikheten
$$\frac{x}{x-1}\leq 2.$$
10. Vad blir resten vid division av $3x^4-2x^3+6x-4$ med $x+1$?
11. Bestäm det naturliga talet n om man vet att $\binom{n}{2}=10$.
12. Skriv talet $1+i\sqrt{3}$ på polär form.
13. Bestäm medelpunkt och radie för cirkeln $x^2+2x+y^2-4y=4$.
14. Lös ekvationen $\ln(x^2-1)-\ln(x+1)=0$.

C-del. (Fullständiga lösningar krävs!)

15. Bevisa med induktion att för alla positiva heltal n gäller

$$\sum_{k=1}^{n} k(3k+1) = n(n+1)^2.$$

16. Ekvationen $z^4 - z^3 - 5z^2 - z - 6 = 0$ har en rot $z = i$. Bestäm samtliga rötter.

17. Bestäm den konstanta termen, om den existerar, i utvecklingen

$$\left(\frac{x^3}{2} - \frac{1}{x^2}\right)^{10}.$$

18. Bestäm ekvationen för de två cirklar som har samma medelpunkt som ellipsen

$$2x^2 + 8x + 3y^2 - 18y + 29 = 0$$

och som tangerar denna. (*Ledning:* att två kurvor tangerar varandra i en punkt betyder att de vidrör varandra utan att skära eller korsa varandra i punkten.)

LYCKA TILL!

SVAR

BASTENTA JANUARI 2011

LÖSNINGAR

(1.) $\dfrac{x}{x+1}$ (2.) $-\frac{1}{2}$ (3) $x<\frac{1}{2}$

(4.) $\sqrt{34}$ (5.) 7 (6) $(x+5)^2+(y-2)^2=3^2$

(7) $x=\pi+2n\pi$ (8) $-4,\ 2.$

---

(9)

$$\frac{x}{x-1}<2 \iff \frac{x}{x-1}-2<0 \iff \frac{x-2(x-1)}{x-1}<0 \iff$$

$$\iff \boxed{\frac{2-x}{x-1}<0}$$

x:		1		2	
2-x:	+	+	+	0	-
x-1:	-	0	+	+	+
$\frac{2-x}{x-1}$	-	*	+	0	-

Svar: $\boxed{x<1 \text{ eller } x>2}$

---

(10) Resten är polynomets värde för $x=-1$ dvs.

$$3(-1)^4-2(-1)^3+6(-1)-4=3+2-6-4=\underline{\underline{-5}}$$

Svar: Resten är -5.

---

(11)

$$\binom{n}{2}=10 \iff \frac{n!}{2!(n-2)!}=10 \iff \frac{n(n-1)}{2}=10 \iff n(n-1)=20$$

ger $\underline{n=5}$

Svar: $\boxed{n=5}$

---

(12) $1+i\sqrt{3}=$ Beloppet är $\sqrt{1+3}=2$ $=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

Svar: $\boxed{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}$

(13) $x^2+2x+y^2-4y=4 \Leftrightarrow$ (kvadratkomplettera!)

$(x^2+2x+1)-1+(y^2-4y+4)-4=4 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-2)^2=9$

Svar: Medelpunkt $\underline{(-1,2)}$, radie $\underline{3}$

---

(14) $\ln(x^2-1)-\ln(x+1)=0 \Leftrightarrow \ln\frac{x^2-1}{x+1}=0 \Leftrightarrow$

$\ln(x-1)=0 \Leftrightarrow x-1=1 \Leftrightarrow \underline{x=2}$ Svar: $\boxed{x=2}$

---

(15) Basfall: $n=1$ $VL=\sum_{k=1}^{1} k(3k+1)=1(3\cdot1+1)=4$

$HL=n(n+1)^2=1(1+1)^2=4$

Visa: $\underbrace{\sum_{k=1}^{n_0} k(3k+1)=n_0(n_0+1)^2}_{A} \Rightarrow \underbrace{\sum_{k=1}^{n_0+1} k(3k+1)=(n_0+1)(n_0+2)^2}_{B}$

$VL(B)=\sum_{k=1}^{n_0+1} k(3k+1)=\sum_{k=1}^{n_0} k(3k+1)+(n_0+1)(3(n_0+1)+1) = \left(\begin{array}{c}\text{Eftersom}\\ A\\ \text{är sann}\end{array}\right)$

$=n_0(n_0+1)^2+(n_0+1)(3n_0+4)=(n_0+1)(n_0(n_0+1)+3n_0+4)=$

$=(n_0+1)(n_0^2+4n_0+4)=\underline{(n_0+1)(n_0+2)^2}=HL(B)$

Induktionssteget är visat och alltså är formeln sann för $n\geq1$ enligt induktionsaxiomet. $\square$

---

(16) Polynomet har reella koefficienter så om $z=i$ är en rot är även $z=-i$ en rot och enligt Faktorsatsen är polynomet delbart med

$(z-i)(z-(-i))=(z-i)(z+i)=\underline{z^2+1}$

(16 forts).

$$z^4 - z^3 - 5z^2 - z - 6 = (z^2+1)(z^2 - z - 6) \quad \text{(inses!)}$$

eller

$$\begin{array}{l} \quad z^2 - z - 6 \\ \hline z^4 - z^3 - 5z^2 - z - 6 \quad \big|\, z^2+1 \\ -z^4 \qquad - z^2 \\ \hline \quad -z^3 - 6z^2 - z \\ \quad\; z^3 + \qquad\;\; z \\ \hline \qquad -6z^2 \\ \qquad\; 6z^2 + 6 \\ \hline \qquad\quad 0 \end{array}$$

$$z^2 - z - 6 = 0$$

$$z = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$$

Svar: $\boxed{z = \pm i, \quad z = 3, -2}$

---

(17)

$$\left(\frac{x^3}{2} - \frac{1}{x^2}\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} \left(\frac{x^3}{2}\right)^k \left(\frac{1}{x^2}\right)^{10-k}$$

Räkna x-potenser: $\frac{(x^3)^k}{(x^2)^{10-k}} = \frac{x^{3k}}{x^{20-2k}} = x^{5k-20}$

Termen är konstant om $\boxed{k=4}$ och blir:

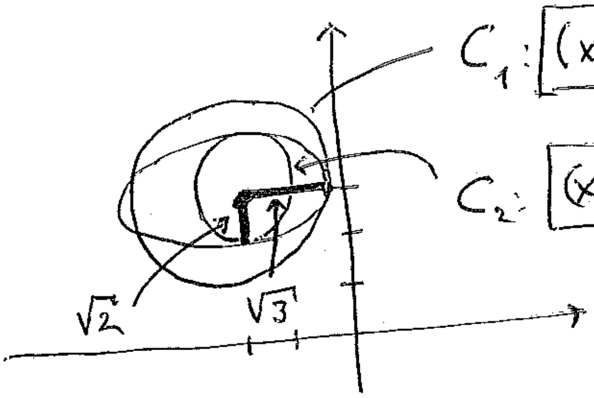
$$\binom{10}{4}\frac{1}{2^4}$$

Svar: $\boxed{\binom{10}{4} \cdot \frac{1}{2^4} \text{ eller } \frac{105}{8}}$

---

(18) $2x^2 + 8x + 3y^2 - 18y + 29 = 0 \Leftrightarrow 2(x^2 + 4x + 4) - 8 + 3(y^2 - 6y + 9) - 27 + 29 = 0$

$\Leftrightarrow 2(x+2)^2 + 3(y-3)^2 = 6 \Leftrightarrow \frac{(x+2)^2}{3} + \frac{(y-3)^2}{2} = 1$



C_1: $\boxed{(x+2)^2 + (y-3)^2 = 3}$

C_2: $\boxed{(x+2)^2 + (y-3)^2 = 2}$

Svar!
