JANUARI 2012

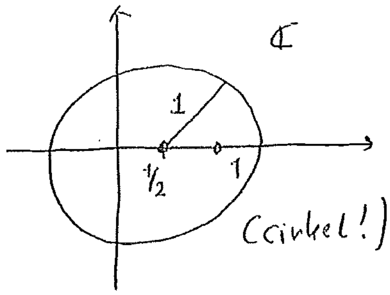
$\boxed{\text{BASKURS}}$

TENTA

SVAR!

LÖSNINGAR!

(1) 1 (2) 8 (3) $1+\dfrac{2}{x+2}$ (4)



(5) $\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + n\pi \\ x = -\frac{\pi}{8} + n\pi \end{cases}$ (6) Punkten $\left(-\frac{7}{2}, -\frac{109}{4}\right)$

(7) $13/8$ (8) $x = 0, \pm 1$

---

(9) $$\frac{2x-1}{4+x} \le 2 \iff \frac{2x-1}{4+x} - 2 \le 0 \iff \frac{2x-1}{4+x} - \frac{2(4+x)}{4+x} \le 0 \iff$$

$$\iff \frac{2x-1-2(4+x)}{4+x} \le 0 \iff \frac{-9}{4+x} \le 0 \iff \underline{\frac{9}{4+x} \ge 0}$$

Viser av detta att svaret blir: $\boxed{x > -4}$

---

(10) Äsch! (Se senare del).

(11) Lägg 1 åt sidan och välj 2 till element ur 8. Det kan ske på $\binom{8}{2}$ sätt. $\binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{2} = \underline{28}$.

Svar: $\binom{8}{2} = 28$.

BUB!

(12) $$3 + i\sqrt{3} = \left\{ \begin{array}{l} |3+i\sqrt{3}| = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} \\ = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \end{array} \right\} = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\frac{\pi}{4}$$

forts.

Så $\dfrac{3+i\sqrt{3}}{1+i} = \dfrac{2\sqrt{3}(\cos \pi/6 + i\sin \pi/6)}{\sqrt{2}(\cos \pi/4 + i\sin \pi/4)} = \sqrt{6}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$= \boxed{\sqrt{6}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)}$

(13) Ersätt med "...termen $\frac{-10}{x}$ ingår i...".

$\left(2-\frac{a}{2x}\right)^7 = \left(2+\left(\frac{-a}{2x}\right)\right)^7 = \sum_{k=0}^{7}\binom{7}{k}\cdot 2^k\left(\frac{-a}{2x}\right)^{7-k} =$

$= \sum_{k=0}^{7}\binom{7}{k}\cdot 2^k(-a)^{7-k}\cdot\frac{1}{2^{7-k}\cdot \boxed{x^{7-k}}}$ för att få $\frac{-10}{x}$ måste vi

ha $\underline{k=6}$ och termen blir:

$\underbrace{\binom{7}{6}}_{7}\cdot 2^6(-a)\cdot\frac{1}{2^1\cdot x} = -7\cdot 2^5\cdot a\cdot\frac{1}{x} = -\frac{10}{x}$ ger

då $a = \frac{10}{7\cdot 2^5} = \frac{5}{7\cdot 16} = \boxed{\frac{5}{112}}$

(14) $\lg(x^2+1) - \lg(4-x) = 1 \Leftrightarrow \lg\frac{x^2+1}{4-x} = 1 \Leftrightarrow$

$\frac{x^2+1}{4-x} = 10 \Leftrightarrow x^2+1 = 40-10x \Leftrightarrow x^2+10x-39=0$

$\Leftrightarrow x = -5 \pm\sqrt{25+39} = -5\pm\sqrt{64} = -5\pm\ . = \begin{cases}3\\-13\end{cases}$

Kontroll i den ursprungliga ekvationen visar att båda fungerar! (Alla x^2+1 och $4-x$ blir positiva).

Svar: $\underline{x=3,-13}$.

(15) $\sin 2x - 2\sin x = 0 \iff 2\sin x\cos x - 2\sin x = 0$

$\iff 2\sin x(\cos x - 1) = 0$

a) $\sin x = 0 \iff \boxed{x = n\pi}\quad n\in\mathbb{Z}$

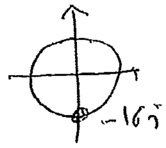
b) $\cos x = 1 \iff \boxed{x = 2n\pi}$ (dessa ingår i a)).

Svar: $\boxed{x = n\cdot\pi,\ n\in\mathbb{Z}}$

---

(16) $z^4 = -16i$. Med $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ och

$-16i = 16\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

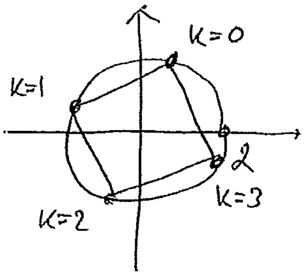


blir ekvationen:

$r^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta) = 16\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} r^4 = 16 \\ 4\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$

$\iff \begin{cases} r = 2 \\ \theta = \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \end{cases}$ ger $\boxed{z_k = 2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right)\right)}$

$k = 0,1,2,3$



---

(17) Sätt in $y = 2x - 1$ i ellipsens ekvation.

Svar: $(1,1)$, $\left(\frac{7}{11}, \frac{3}{11}\right)$

(18) Rötter

$z = 1 \pm i\sqrt{2}$

$z = \pm 1$

10. $$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^k = 3 - \frac{2^{n+1}}{3^n} \qquad P_n$$

gäller för alla $n \in N$

1) $n = 0$ Basfallet.

$$V.L = \sum_{k=0}^{0}\left(\frac{2}{3}\right)^k = \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$$

$$H.L = 3 - \frac{2^{0+1}}{3^0} = 3 - \frac{2^1}{1} = 1$$

$V.L = H.L$ $\therefore P_n$ sant för $n = 0$

2) Antag att P_n sant för $n = p$

dvs. $$\underbrace{\sum_{k=0}^{p}\left(\frac{2}{3}\right)^k}_{V.L_p} = \underbrace{3 - \frac{2^{p+1}}{3^p}}_{H.L_p}$$ är sant

Visa att ~~...~~ P_n då är sann för $n = p+1$

$$V.L_{p+1} = \sum_{k=0}^{p+1}\left(\frac{2}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{p}\left(\frac{2}{3}\right)^k + \left(\frac{2}{3}\right)^{p+1} =$$

enl antagandet

Mål:

$H.L_{p+1} =$

$= 3 - \frac{2^{p+1+1}}{3^{p+1}} =$

$= 3 - \frac{2^{p+2}}{3^{p+1}}$

$$= 3 - \frac{2^{p+1}}{3^p} + \frac{2^{p+1}}{3^{p+1}} =$$

$$= 3 - \frac{3 \cdot 2^{p+1} - 2^{p+1}}{3^{p+1}} = 3 - \frac{2 \cdot 2^{p+1}}{3^{p+1}} =$$

$$= 3 - \frac{2^{p+2}}{3^{p+1}} \qquad \therefore V.L_{p+1} = H.L_{p+1}$$

$\therefore$ Om P_p sann så är P_{p+1} sann.

3) Enligt induktionsaxiomet är P_n sann för alla $n \in N$.