UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Gunnar Berg

Prov i matematik
Baskurs i matematik

Geokand,Frist.kurs
Lärarprogrammet
2012-06-05

Skrivtid: 14-19. Tillåtna hjälpmedel: skrivdon. Poäng: varje uppgift ger maximalt 1 poäng på A-delen, 2 poäng på B-delen och 5 poäng på C-delen. För Godkänd fordras minst 18 poäng, för betyget fyra minst 25 poäng och för betyget fem minst 32 poäng. **På B-och C-delarna accepteras endast välskrivna och tydliga lösningar för rättning.**

A-del. (Endast svar krävs!)

1. Förenkla uttrycket
$$\frac{x^3 - x}{x+1}.$$
2. Bestäm värdet av $\sin(4\pi/3)$.
3. För vilka x gäller $6 + x > 2 + 3x$?
4. Bestäm beloppet av det komplexa talet $-1 + 3i$.
5. Om $\log_a 27 = 3$, vad är a ?
6. Ge ekvationen för en cirkel med medelpunkt i $(2, -1)$ och radie 2.
7. Bestäm alla lösningar till ekvationen $\cos 2x + 1/2 = 0$.
8. Vilka *reella* tal uppfyller $|3 - x| = 2$?

B-del. (Fullständiga lösningar krävs!)

9. Lös ekvationen $|x + 5| - 2|x| = 1$.
10. Vad blir resten vid division av polynomet $p(x) = x^3 + 2x^2 - x - 3$ med $x + 1$?
11. Bestäm koordinaterna för vertex till parabeln $y = x^2 - 6x$.
12. Bestäm de reella lösningarna till ekvationen
$$\log_2(x+1) + \log_2(x-1) = 3.$$
13. Skriv talet $-3 + 3i$ på polär form.
14. Bestäm brännpunkterna till ellipsen $2\,x^2 + 4\,y^2 = 16$.

VAR GOD VÄND!

C-del. (Fullständiga lösningar krävs!)

15. Lös olikheten

$$\left|\frac{x}{x+1}\right| < 1.$$

16. Bevisa med induktion att för alla positiva heltal n gäller

$$\sum_{k=1}^{n} 2\overset{k}{\cancel{n}} = n(n+1).$$

17. Ekvationen $z^4 - z^3 - 6z^2 + 14z - 12 = 0$ har en rot $z = 1 + i$. Bestäm samtliga rötter.

18. Bestäm den konstanta termen, om den existerar, i utvecklingen av

$$\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{x^2}\right)^{18}.$$

LYCKA TILL!

SVAR!

BASKURSEN TENTA 5 JUNI 2012

LÖSNINGAR!

1. $x^2 - x$
2. $-\sqrt{3}/2$
3. $x < 2$
4. $\sqrt{10}$
5. $a = 3$
6. $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$
7. $x = \frac{\pi}{3} + n\pi$, $x = \frac{2\pi}{3} + n\pi$
8. $x = 1, 5$

---

9. $|x+5| - 2|x| = 1$.

a) $x \geq 0$: $x + 5 - 2x = 1 \iff x = 4$ ok

b) $-5 \leq x < 0$: $x + 5 + 2x = 1 \iff x = -4/3$ ok

c) $x < -5$: $-(x+5) + 2x = 1 \iff x = 6$ ligger inte i rätt område.

Svar: $\boxed{x = 4,\ x = -4/3}$

10.

$$
\begin{array}{rl}
x^2 + x - 2 & \\
\hline
x^3 + 2x^2 - x - 3 & \big|\ x+1 \\
-x^3 - x^2 & \\
\hline
x^2 - x & \\
-x^2 - x & \\
\hline
-2x - 3 & \\
+2x + 2 & \\
\hline
-1 &
\end{array}
$$

Alternativt: Sätt in $x = -1$ i polynomet:

$(-1)^3 + 2(-1)^2 - (-1) - 3 = -1$

Svar: $\boxed{x = -1}$

---

11. $y = x^2 - 6x = x^2 - 6x + 9 - 9 = (x-3)^2 - 9$

Koordinaten för vertex: $\boxed{(3, -9)}$

(Log 1)

12 $\log_2(x+1)+\log_2(x-1)=3 \Rightarrow \log_2(x+1)(x-1)=3$

$\Leftrightarrow \log_2(x^2-1)=3 \Leftrightarrow x^2-1=2^3 \Leftrightarrow x^2=9$

$\Leftrightarrow$ $\underline{x=\pm 3}$. Pröva! $x=-3$ fungerar inte reellt.

Svar: $\boxed{x=3}$

---

13 $|-3+3i|=\sqrt{(-3)^2+3^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$. B.U.B ger

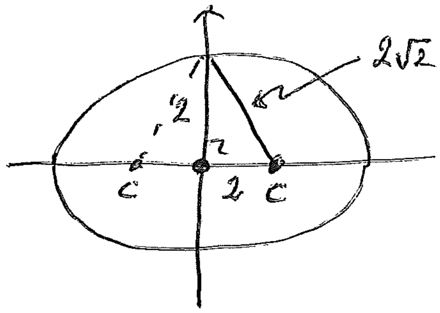
$$-3+3i=3\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)=\boxed{3\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)}$$

---

14 $2x^2+4y^2=16 \Leftrightarrow \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{(2\sqrt{2})^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$

a = halva storaxeln $=2\sqrt{2}$
b = halva lillaxeln $=2$
c = brännpunktsavstånd: $c^2=a^2-b^2=8-4=4 \Rightarrow \underline{c=2}$
(från mittpunkt)

Svar: Koordinaterna för brännpunkterna är $\boxed{(-2,0) \text{ och } (2,0)}$



---

15 $\left|\frac{x}{x+1}\right|<1 \Leftrightarrow -1 \overset{a)}{<} \frac{x}{x+1} \overset{b)}{<} 1$

a) $\frac{x}{x+1}>-1 \Leftrightarrow \frac{x}{x+1}+1>0 \Leftrightarrow \frac{x+(x+1)}{x+1}>0 \Leftrightarrow \underline{\frac{2x+1}{x+1}>0}$

Forts. $\frac{2(x+1/2)}{x+1} > 0$

x		-1		$-1/2$	
$2(x+1/2)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{2(x+1/2)}{x+1}$	$+$	$*$	$-$	0	$+$

Vi ser att a) är sann om

$x<-1$ eller $x>-1/2$ (i)

b) $\frac{x}{x+1}<1 \Leftrightarrow \frac{x}{x+1}-1<0 \Leftrightarrow \frac{x-(x+1)}{x+1}<0 \Leftrightarrow \frac{-1}{x+1}<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x+1}>0 \Leftrightarrow \boxed{x>-1}$ (ii)

Både (i) och (ii) gäller om $\boxed{x>-1/2}$ Svar!

---

16 Basfall: $VL(n=1) = 2\cdot 1 = 2$ $\quad HL(n=1) = 1\cdot 2 = 2$ OK

Visa: $\sum_{k=1}^{n} 2k = n(n+1) \Rightarrow \sum_{k=1}^{n+1} 2k = (n+1)(n+2)$
(A) (B)

$VL(B) = \sum_{k=1}^{n+1} 2k = \sum_{k=1}^{n} 2k + 2(n+1) = n(n+1)+2(n+1) = (n+1)(n+2) =$
(A SANN!)
$= HL(B)$

Så (A) ⇒ (B).
Induktionsaxiomet ger resultatet. □

---

17 Eftersom polynomet har reella rötter är även $\bar{z} = 1-i$ en rot och Faktorsatsen ger att polynomet är delbart med $(z-(1-i))(z-(1+i)) = z^2-2z+2$:

$$z^4 - z^3 - 6z^2 + 14z - 12 = (z^2-2z+2)\underline{(z^2+z-6)}$$

Slutligen: $z^2+z-6=0 \iff z = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+6} \iff$

$$\iff z = -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$$

<u>Svar</u>: Rötter: $\boxed{z = 2, -3, 1 \pm i}$

---

18 $$\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{x^2}\right)^{18} = \sum_{k=0}^{18} \underbrace{\binom{18}{k}\left(\frac{x}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right)^{18-k}}_{\alpha_k}$$

$$\alpha_k = \binom{18}{k} \cdot \frac{x^k}{2^k} \cdot \frac{(-1)^{18-k}}{x^{2(18-k)}} =$$

$$= \binom{18}{k} \cdot \frac{(-1)^{18-k}}{2^k} \cdot x^{\underline{k+2k-36}}$$ konstant term svarar mot $3k-36=0 \iff \boxed{k=12}$

Termen blir: $$\binom{18}{12}\frac{(-1)^6}{2^{12}} = \boxed{\binom{18}{12} \cdot \frac{1}{2^{12}}}$$ <u>Svar</u>:
