TENTAMEN - ELEMENTARY NUMBER THEORY 2019/03/21

JULIAN KÜLSHAMMER
English version

Time: 8:00–13:00. No aids allowed except a pen. All solutions should be accompanied with justifications.
Each of the following exercises is worth 5 points, i.e. the total score of the tenta is 40 points. If you achieve 18, 25, or 32 points, respectively, you will receive grade 3,4, or 5.
Up to 3 bonus points from the home assignments can be used for this tentamen.

1. (i) Determine all (integer) solutions to the linear Diophantine equation $111x+81y-45z = 15$.
(ii) Determine all continued fractions $\langle a_0, a_1, \ldots, a_n\rangle$ whose value $K(\langle a_0, a_1, \ldots, a_n\rangle)$ is equal to $\frac{239}{35}$.

2. Solve the following system of linear congruences:

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \mod 12 \\ x &\equiv 6 \mod 10 \\ x &\equiv 11 \mod 45 \end{aligned}$$

3. Solve the congruence $x^3 + x + 4 \equiv 0 \mod 343$.

4. (i) Show that $\overline{6}$ is a primitive root in $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^\times$.
(ii) How many primitive roots are there in $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^\times$? Determine all of them.

5. Let

$$s\colon \mathbb{N}_1 \to \mathbb{C}, \quad s(n) = \begin{cases} 0 & \text{if there exists a prime number } p \text{ such that } p^2 \mid n, \\ 1 & \text{else,} \end{cases}$$

be the characteristic function of the square free numbers.
(i) Show that s is multiplicative.
(ii) Compute the Möbius transform $s * \mu$ of s where μ is the Möbius function and $*$ denotes the convolution product.

6. (i) Determine the value $z = K(\langle 4; \overline{4, 8}\rangle)$ of the periodic continued fraction $\langle 4; \overline{4, 8}\rangle$. Find an integer d such that $z^2 = d$.
(ii) Compute the first three convergents of z.
(iii) Give two positive integer solutions to the equation $x^2 - dy^2 = 1$ where d is as in (i).

7. Let $p > 2$ be a prime number. Show that the smallest positive integer a, such that the Legendre symbol $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$, is a prime number.

8. Prove that the Diophantine equation $x^4 - 4y^4 = z^2$ has no positive integer solution.

Good luck!

Svenska versionen

Skrivtid: 8:00–13:00 Inga hjälpmedel förtuom skrivdon. Lösningarna skall åtföljas av förklarande text.
Tentamen består av åtta uppgifter värda 5 poäng vardera, d.v.s. maximalt kan man få 40 poäng på tentamen. Ett resultat om minst 18, 25, resp. 32 poäng ger betyg 3,4, resp. 5. Upp till 4 bonus poäng från hemuppgifter kan användas för denna tentamen.

1. (i) Bestäm alla (heltals)lösningar till den diofantiska ekvationen $111x + 81y - 45z = 15$.
(ii) Bestäm alla kedjebråk $\langle a_0, a_1, \ldots, a_n\rangle$ vars värde $K(\langle a_0, a_1, \ldots, a_n\rangle)$ är lika med $\frac{239}{35}$.

2. Lös följande system av linjära kongruenser:

$$x \equiv 2 \mod 12$$
$$x \equiv 6 \mod 10$$
$$x \equiv 11 \mod 45$$

3. Lös kongruensen $x^3 + x + 4 \equiv 0 \mod 343$.

4. (i) Visa att $\overline{6}$ är en primitiv rot i $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^\times$.
(ii) Hur många primitiva rötter finns det i $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^\times$? Bestäm dem.

5. Låt

$$s\colon \mathbb{N}_1 \to \mathbb{C}, \quad s(n) = \begin{cases} 0 & \text{om det existerar ett primtal } p \text{ så att } p^2 \mid n, \\ 1 & \text{annars,} \end{cases}$$

vara den karakteristiska funktionen för kvadratfria tal.
(i) Visa att s är multiplikativ.
(ii) Beräkna Möbiustransformen $s * \mu$ av s där μ är Möbiusfunktionen och $*$ betecknar faltningen.

6. (i) Beräkna värdet $z = K(\langle 4; \overline{4, 8}\rangle)$ av det periodiska kedjebråket $\langle 4; \overline{4, 8}\rangle$. Hitta ett heltal d så att $z^2 = d$.
(ii) Beräkna de tre första konvergenterna av z.
(iii) Ange två positiva heltalslösningar till ekvationen $x^2 - dy^2 = 1$ där d är som i (i).

7. Låt $p > 2$ vara ett primtal. Visa att det minsta positiva heltalet a, så att Legendresymbolen $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$, är ett primtal.

8. Visa att den diofantiska ekvationen $x^4 - 4y^4 = z^2$ inte har någon positiv heltalslösning.

Lycka till!