UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Erik Lindgren

Lösning till Tentamen i matematik
Envariabelanalys för M, 1MA210
9 januari 2020

1. a) Vi förlänger bägge sidor med $\sqrt{x^4+x}+\sqrt{x^4+\frac{x^2}{2}}$ och får då

$$\frac{x^4+x-\left(x^4+\frac{x^2}{2}\right)}{\sqrt{x^4+x}+\sqrt{x^4+\frac{x^2}{2}}}=\frac{x-\frac{x^2}{2}}{\sqrt{x^4+x}+\sqrt{x^4+\frac{x^2}{2}}}.$$

Vi förkortar sedan med x^2 och får

$$\frac{x^{-1}-\frac{1}{2}}{\sqrt{1+x^{-3}}+\sqrt{1+\frac{x^{-2}}{2}}}.$$

Således får vi

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^4+x}-\sqrt{x^4+\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{-1}-\frac{1}{2}}{\sqrt{1+x^{-3}}+\sqrt{1+\frac{x^{-2}}{2}}}=\frac{-\frac{1}{2}}{2}=-\frac{1}{4}.$$

b) Vi använder följande Tayloruppskattningar:

$$\ln(1+x)=x+\mathcal{O}(x^2),\quad \sin x=x+\mathcal{O}(x^3),\quad e^x=1+x+\mathcal{O}(x^2).$$

Kombineras de två sista får vi även

$$e^{\sin x}=1+x+\mathcal{O}((\sin x)^2)=1+x+\mathcal{O}(x^2).$$

Därför får vi

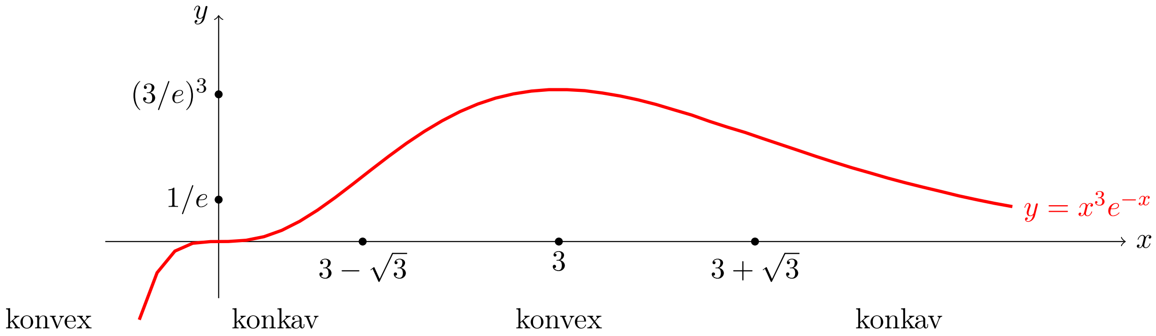
$$\frac{\ln(1+x)}{e^{\sin x}-1}=\frac{x+\mathcal{O}(x^2)}{x+\mathcal{O}(x^2)}=\frac{1+\mathcal{O}(x)}{1+\mathcal{O}(x)},$$

där vi förkortat med x i sista steget. Låt vi $x\to 0$ ser vi då att

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{e^{\sin x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\mathcal{O}(x)}{1+\mathcal{O}(x)}=1.$$

2. Med $f(x) = x^3 e^{-x}$ så har vi $f'(x) = x^2 e^{-x}(3-x)$ och $f''(x) = xe^{-x}(x^2 - 6x + 6)$. Kritiska punkter är då $x = 0$ och $x = 3$. Vi kan också sluta oss till att $f' > 0$ om $0 < x < 3$ och $x < 0$, och att $f' < 0$ om $x > 3$. Vidare har vi att $f'' < 0$ om $x < 0$ eller $x \in (3-\sqrt{3}, 3+\sqrt{3})$ och $f'' > 0$ om $x \in (0, 3-\sqrt{3})$ eller $x > 3+\sqrt{3}$. Vi ser också att vi har gränsvärdena
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$
Vi tar också fram att $f(0) = 0$, $f(1) = (1/e) \approx 1/3$ och $f(3) = (3/e)^3 \approx (1.1)^3 \approx 1.3$.

Då vet vi nu att f är sträng avtagande till höger om $x = 3$ och strängt växande till vänster om $x = 3$. Den enda möjliga extrempunkten är då i $x = 3$ vilket måste vara ett globalt max. Då gränsvärdet är $-\infty$ då $x \to -\infty$ antar f ej något min. Alltså maxvärdet är $f(3) = (3/e)^3$ och minvärde finns ej. Vi vet även var f är konkav resp konvex från tecknet på f'' ovan. Vi kan då skissa upp följande:



3. Vi börjar med partialintegration och får
$$\int x \arcsin x^2 dx = -\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}} dx + \frac{x^2}{2}\arcsin(x^2).$$
Den första integralen löser vi genom variabelsubstitutionen $t = x^4$ vilket ger $dt = 4x^3 dx$ och därmed
$$-\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}} dx = -\int \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{1-t}} dt = \frac{1}{2}\sqrt{1-t} + C = \frac{1}{2}\sqrt{1-x^4} + C.$$
Summerar vi upp detta får vi
$$\int x \arcsin x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{1-x^4} + \frac{x^2}{2}\arcsin(x^2) + C.$$

4. Vi har formeln för generell funktiongraf $f(x)$ med intervall $[a, b]$:

$$V = \int_a^b \pi(f(x))^2 dx.$$

I detta fall får vi då

$$V = \int_1^\infty \frac{\pi}{1+x^2} dx = \pi[\arctan x]_1^\infty = \pi(\pi/2 - \pi/4) = \pi^2/4 \text{ volymenheter.}$$

5. Vi testar de olika fallen $|x| > 1$ och $|x| \leq 1$ separat.

Om $|x| > 1$ ser vi att

$$\frac{|x|^k \ln k}{k^3}$$

inte konvergerar mot 0 då $k \to \infty$. Alltså kan inte serien vara konvergent i detta fall.

Om $|x| \leq 1$ så studerar vi om serien är absolutkonvergent. Då skall vi studera konvergensen av den positiva serien

$$\sum_1^\infty \frac{|x|^k \ln k}{k^3}$$

som är mindre än den konvergenta serien

$$\sum_1^\infty \frac{1}{k^2},$$

eftersom $|x| \leq 1$ och $\ln k < k$. Därmed konvergerar den ursprungliga serien absolut och således konvergerar den.

Vi sammanfattar: Serien konvergerar för $|x| \leq 1$ och divergerar annars.

6. Vi använder Taylorpolynom av grad 3. Vi har generellt

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)x^2/2 + f^{(3)}(s)x^3/6$$

för något $s \in (0, x)$.

Vi väljer här $f(x) = \sqrt{9+x}$. Då har vi $\sqrt{10} = f(1)$. Vi har också

$$f'(x) = \frac{1}{2}(9+x)^{-\frac{1}{2}}, \quad f''(x) = -\frac{1}{4}(9+x)^{-\frac{3}{2}}, \quad f^{(3)}(x) = \frac{3}{8}(9+x)^{-\frac{5}{2}}$$

och även $f'(0) = 1/6$ och $f''(0) = -1/(4 \cdot 3^3)$.
Vi får då

$$f(1) \approx f(0) + f'(0) + f''(0)/2 = 3 + 1/6 - 1/(8 \cdot 3^3) = \frac{251}{216},$$

där absolutbeloppet av felet i approximationen ges av

$$|f^{(3)}(s)/6| = \frac{3}{8}(9+x)^{-\frac{5}{2}}/6 \leq \frac{1}{16 \cdot 3^5} = \frac{1}{16 \cdot 243} < \frac{1}{1000},$$

där vi använde att $s \in (0,1)$. Alltså är felet i approximationen mindre än en tusendel.
Approximationen är då

$$\sqrt{10} \approx 3 + 1/6 - 1/(8 \cdot 3^3) = \frac{251}{216}.$$

7. a) Vi säger att

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$

om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett $R > 0$ så att $x > R$ implicerar att

$$|f(x)| < \varepsilon.$$

b) Tag $\varepsilon > 0$, vi vill då visa att det finns $R > 0$ så att om $x > R$ så har vi

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| < \varepsilon.$$

Om vi väljer $R = 1/\varepsilon$ ser vi att vi får

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq \left|\frac{1}{x}\right| < \frac{1}{R} = \varepsilon,$$

där vi har använt att $|\sin x| \leq 1$.
Alltså har vi visat att att det finns ett sådant R.

8. a) T ex följden $\{(-1)^n\}$.
b) T ex följden $1, 2, 3, 4, \ldots$
c) T ex $f(x) = x^2$.

d) T ex funktionen som är 1 på alla rationella tal i $[2,5]$ och 0 på de irrationella talen i $[2,5]$.

e) T ex funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

Vi har då att $f'(x) = 2x$ om $x \geq 0$ och 0 annars. Genom att studera gränsvärdet som då definierar andraderivatan i $x = 0$ ser man att andraderivatan ej existerar i $x = 0$.

9. Det räcker att visa att det finns följder av över- och undertrappfunktioner Φ_n och Ψ_n så att

$$\int_0^1 \Phi_n - \Psi_n dx \to 0,$$

då $n \to \infty$. Integralen av f är då lika med

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \Phi_n(x)dx.$$

Låt n vara ett positivt heltal och låt $x_k = k/n$ för $k = 0, \ldots, n$. Eftersom $f(x)$ är växande så kan vi välja följande över- och undertrappfunktioner:

$$\Phi_n(x) = f(x_k) \text{ för } x \in [x_{k-1}, x_k]$$

och

$$\Psi_n(x) = f(x_{k-1}) \text{ för } x \in [x_{k-1}, x_k].$$

Vi har då

$$\int_0^1 \Phi_n(x)dx = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)/n = \sum_{k=1}^{n} k^2/n^3 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)/n^3 \to 1/3$$

då $n \to \infty$. Här har vi använt formeln som är given i uppgiften. På samma sätt har vi

$$\int_0^1 \Psi_n(x)dx = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})/n = \sum_{k=1}^{n}(k-1)^2/n^3 = \sum_{j=1}^{n-1}(j)^2/n^3 = \frac{1}{6}(n-1)n(2(n-1)+1)/n^3 \to 1/3$$

då $n \to \infty$. Alltså har vi visat att funktionen är integrerbar och att integralens värde är lika med $1/3$.

10. Vi delar upp lösningen i olika fall. Om

$$\int_0^1 f(x)dx = 0$$

så kan vi välja $c = 1$.

Låt

$$f(x) = \int_0^x f(x)dx.$$

Då har vi att $f(0) = 0$. Vidare har vi att f är kontinuerlig på $[0, 1]$ och därmed antar f alla världen mellan $f(0)$ och $f(1)$. $f(1)/4$ ligger därimellan och därför finns det ett c så att $f(c) = f(1)/4$. Detta betyder exakt att

$$\int_0^c f(x)dx = \frac{1}{4}\int_0^1 f(x)dx,$$

vilket var det vi ville visa.