UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Erik Lindgren
Tel.: 070-5892942
E-post: `erik.lindgren@math.uu.se`

Tentamen i matematik
Envariabelanalys för M, 1MA210
16 juni 2020

Skrivtid: 8:00–13:00. Tillåtna hjälpmedel: skrivdon.
Antal uppgifter är 10. Det maximala antalet poäng för varje uppgift är 5 p. Alla svar ska motiveras med lämpliga beräkningar eller med en hänvisning till lämplig teori. Skriv din tentakod på varje ark. Betygsgränserna är: 0-21= Betyg U, 22-35= Betyg 3, 36-42= Betyg 4, 43-50= Betyg 5.

1. Bestäm följande gränsvärden:

   a)
   $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{x}$$

   b)
   $$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^3+x^{\frac{3}{2}}} - \sqrt{x^3+x}\right)$$

2. Skissa grafen till kurvan $y = (x^2-1)/x^3$. Bestäm och klassificera lokala och globala extrempunkter samt bestäm funktionens max- och minvärden. Bestäm även eventuella asymptoter.

–Var god vänd–

3. Bestäm följande integraler:

   a)
$$\int x(\ln(x))^2\,dx$$

   b)
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\,\sin x\,dx$$

4. Avgör om följande generaliserade integraler är konvergenta eller divergenta:

   a)
$$\int_e^{\infty} \frac{1}{(1+x^4)\ln x}\,dx$$

   b)
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x\sin x}\,dx$$

5. Använd Taylorpolynom för att bestämma ett närmevärde till integralen
$$\int_0^1 e^{-t^2}\,dt$$
med ett fel som är mindre än 1/20.

6. Låt $f(x) = x^7 + 2x$. Visa att f är inverterbar och bestäm
$$\int_0^3 g(t)dt,$$
där g är fs invers.

7. Bestäm för vilka x potensserien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(3x)^k}{\sqrt[5]{k}}$$

konvergerar och för vilka x den divergerar.

8. a) Betrakta följden a_k för $k = 1, 2, 3, \ldots$ och definiera vad som menas med att a_k konvergerar mot något tal L.

   b) Visa med hjälp av definitionen att följden som ges av

$$a_k = \frac{\ln k}{k^3}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

   konvergerar mot 0.

9. I denna uppgift krävs endast svar och ingen motivering. Ge exempel på:

   a) En monoton talföljd som ej är begränsad.

   b) En begränsad talföljd som ej är konvergent.

   c) En kontinuerlig funktion på $[1, \infty)$ som ej är begränsad på $[1, \infty)$.

   d) En integrerbar funktion på $[0, 1]$ som ej är kontinuerlig på $[0, 1]$.

   e) En kontinuerlig funktion på $[-1, 1]$ som ej är två gånger deriverbar i $x = 0$.

10. Antag att f är en kontinuerligt deriverbar funktion på $[0, 1]$ med värdemängd $[0, 1]$ sådan att $f(0) = 0$. Visa att det finns ett $x \in [0, 1]$ så att $f'(x) = 1$.

Lycka till!