UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Erik Lindgren

Lösning till Omtentamen i matematik
Envariabelanalys för M, 1MA210
16 juni 2020

1. a) Gränsvärdet är av typen 0/0. Användning av l'Hopitals regel ger att

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{(1+\sin x)}\cos x}{1} = 1.$$

b) Om vi förlänger med $\sqrt{x^3+x^{\frac{3}{2}}}+\sqrt{x^3+x}$ får vi uttrycket

$$\frac{x^3+x^{\frac{3}{2}}-x^3-x}{\sqrt{x^3+x^{\frac{3}{2}}}+\sqrt{x^3+x}} = \frac{x^{\frac{3}{2}}-x}{\sqrt{x^3+x^{\frac{3}{2}}}+\sqrt{x^3+x}} = \frac{1-x^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1+x^{-\frac{3}{2}}}+\sqrt{1+x^{-2}}}.$$

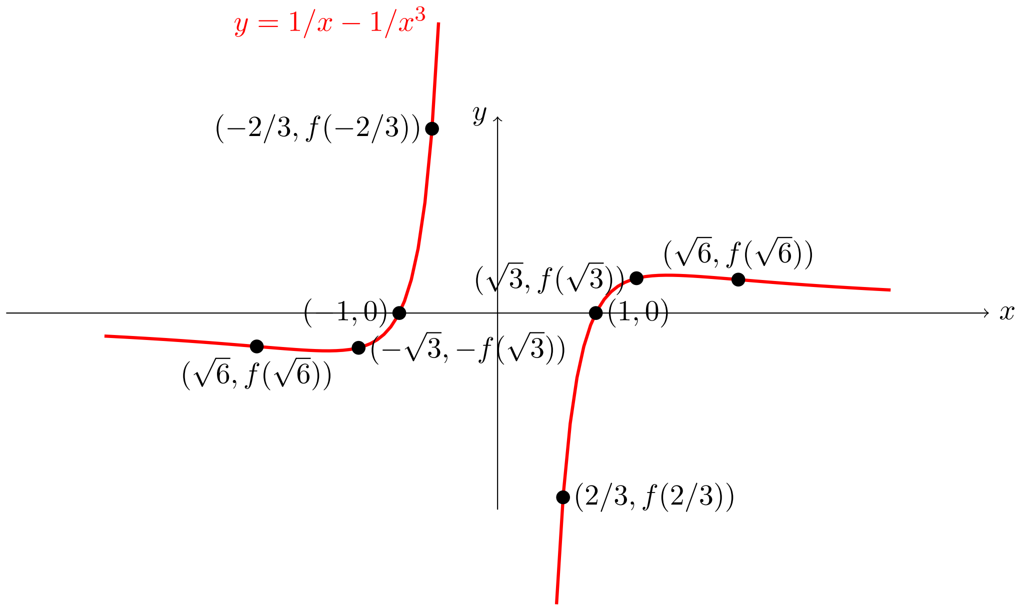
Därför blir gränsvärdet lika med

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1-x^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1+x^{-\frac{3}{2}}}+\sqrt{1+x^{-2}}} = \frac{1}{2}.$$

2. Med $f(x) = (x^2-1)/x^3 = 1/x - 1/x^3$ så har vi $f'(x) = -1/x^2 + 3/x^4$. Vi ser då att f är strängt växande för $|x| < \sqrt{3}$ och strängt avtagande för $|x| > \sqrt{3}$. Vidare har vi att $f(x) \to +\infty$ då $x \to 0$ från vänster och $f(x) \to -\infty$ då $x \to 0$ från höger. Vi ser också att $f(x) \to 0$ då $x \to \pm\infty$. Vi kan då sluta oss till att f inte antar något globalt max eller globalt min. Däremot har f lokalt min i $x = -\sqrt{3}$ or lokalt max i $x = \sqrt{3}$.

   Vi tittar också på $f''(x) = 2/x^3 - 12/x^5$. Vi ser då att $f'' \geq 0$ och därmed konvex om $x \geq \sqrt{6}$ eller $-\sqrt{6} \leq x < 0$. Vi ser också att $f'' \geq 0$ och därmed konkav om $0 < x \leq \sqrt{6}$ eller om $x \leq -\sqrt{6}$.

   Vi kan då skissa grafen mha av detta ovan och punkterna $x = \pm\sqrt{3}$, $x = \pm\sqrt{6}$, $x = \pm 1$ och $x = \pm 2/3$.



3. a) Vi partialintegrerar två gånger och får

$$\begin{aligned}
\int x(\ln(x))^2 dx &= -\int \frac{x^2}{2} \cdot 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x} dx + \frac{x^2}{2}(\ln(x))^2 \\
&= -\int x \ln x dx + \frac{x^2}{2}(\ln(x))^2 \\
&= +\int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx - \frac{x^2}{2}\ln(x) + \frac{x^2}{2}(\ln(x))^2 \\
&= \int \frac{x}{2} dx - \frac{x^2}{2}\ln(x) + \frac{x^2}{2}(\ln(x))^2 \\
&= \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2}\ln(x) + \frac{x^2}{2}(\ln(x))^2 + C
\end{aligned}$$

b) Vi ser att derivatan av $-\frac{1}{3}\cos^3 x$ är $\cos^2 x \sin x$ och får därmed

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \sin x dx = \frac{1}{3}\left(-\cos^3(\pi/4) + \cos^3(0)\right) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{(\sqrt{2})^3}\right) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right).$$

Uppgiften kan också lösas genom substitutionen $t = \cos x$.

4. a) Eftersom $(1+x^4)\ln x \geq (1+x^4) \geq x^4 \geq x^2$ då $x \geq e$ så har vi att integranden är begränsad ovanifrån av $\frac{1}{x^2}$. Eftersom integralen

$$\int_e^\infty \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_e^\infty = \frac{1}{e}$$

är konvergent och integranden är positiv, så gäller det enligt jämförelsesatsen att även

$$\int_e^\infty \frac{1}{(1+x^4)\ln x}dx$$

är konvergent.

b) Eftersom $\sin x \in [0,1]$ för $x \in [0,\pi/2]$ så gäller att $x \sin x \leq x$. Alltså har vi

$$\frac{1}{x\sin x} \geq \frac{1}{x}$$

för $x \in (0,\pi/2]$. Eftersom

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{x}dx$$

divergerar mot ∞ och integranden är positiv, så gäller även att

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{x\sin x}dx$$

divergerar mot ∞ enligt jämförelsesatsen.

6. Från Taylors formel har vi för Taylorpolynomet kring a

$$f(x) - P_2(x) = \frac{1}{3!}f^{(3)}(t)(x-a)^3$$

för något t mellan a och x. Låter vi $f(x) = e^x$ och använder Taylorpolynomet kring origo, får vi för $x \in (-1,0)$

$$e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} = \frac{1}{3!}e^t x^3$$

för något $t \in (x,0)$. Eftersom $0 \leq e^t \leq 1$ för $t \leq 0$ så får vi

$$|e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}| \leq \left|\frac{1}{3!}x^3\right| = \frac{|x|^3}{6}.$$

Låter vi $x = -t^2$ ger detta

$$|e^{-t^2} - 1 + t^2 - t^4/2| \leq \frac{t^6}{6}.$$

Genom att integrera $1 - t^2 + t^4/2$ får vi då en uppskattning på integralen där (absolutbeloppet av) felet är mindre än

$$\int_0^1 \frac{t^6}{6} dt = \frac{1}{42} < \frac{1}{20}.$$

Vi integrerar då $1 - t^2 + t^4/2$ och får

$$\int_0^1 1 - t^2 + t^4/2 dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} = \frac{23}{30}.$$

Detta är ett närmevärde på integralen med ett fel som är mindre än 1/20.

6. Vi ser att $f'(x) = 7x^6 + 2 \geq 2$. Således är f strängt växande och därmed inverterbar överallt. För att bestämma integralen använder vi substitutionen $x = g(t)$ eller $t = f(x)$ vilket ger $dt = f'(x)dx$ och därmed

$$\int_0^3 g(t)dt = \int_{g(0)}^{g(3)} xf'(x)dx = \int_0^1 7x^7 + 2xdx = \frac{7}{8} + 1 = \frac{15}{8},$$

där vi använt att $g(0) = 0$ och $g(3) = 3$ eftersom $f(0) = 0$ och $f(1) = 3$.

7. Enligt kvotkriteriet kan vi hitta konvergensradien genom att titta på

$$\lim_{k \to \infty} \frac{3^k \sqrt[5]{k+1}}{3^{k+1} \sqrt[5]{k}} = \frac{1}{3}.$$

Detta betyder att serien är absolutkonvergent för $|x| < \frac{1}{3}$ och divergent för $|x| > \frac{1}{3}$.

Vi testar de olika fallen $x = \pm\frac{1}{3}$ separat. Om $x = \frac{1}{3}$ så har vi serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{k}}$$

som är divergent eftersom t ex integralen

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{x}} dx$$

är divergent.

Om $x = -\frac{1}{3}$ så har vi serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt[5]{k}}$$

som är konvergent eftersom termerna är avtagande och alternerande.

Vi sammanfattar: Serien konvergerar för $-\frac{1}{3} \leq x < \frac{1}{3}$ och divergerar annars.

8. a) Vi säger att

$$\lim_{k\to\infty} a_k = L$$

om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett tal $N > 0$ så att $k > N$ implicerar att

$$|a_k - L| < \varepsilon.$$

b) Tag $\varepsilon > 0$, vi vill då visa att det finns $N > 0$ så att om $k > N$ så har vi

$$\left|\frac{\ln k}{k^3}\right| < \varepsilon.$$

Om vi väljer N till $1/\sqrt{\varepsilon}$ och $k > N$ ser vi att vi får

$$\left|\frac{\ln k}{k^3}\right| \le \left|\frac{1}{k^2}\right| < \frac{1}{N^2} \le \varepsilon,$$

där vi har använt att $\ln k \le k$ om $k \ge 1$.
Alltså har vi visat att att det finns ett sådant N.

9. a) T ex följden $1, 2, 3, 4, \ldots$
b) T ex följden $\{(-1)^n\}$.
c) T ex $f(x) = x$.
d) T ex funktionen som är 0 på intervallet $[0, 1/2]$ och 0 på intervallet $(1/2, 0]$.
e) T ex funktionen $f(x) = |x|$. Denna funktion är ej deriverbar en gång i $x = 0$ och därmed inte deriverbar två gånger heller. Däremot är den kontinuerlig överallt.

10. Eftersom värdemängden är $[0, 1]$ så finns ett $t \in [0, 1]$ så att $f(t) = 1$. Vi vet också att $t \neq 0$ eftersom $f(0) = 0$. Vi delar upp i olika fall.

Fall 1: Om $t = 1$ så har vi från medelvärdessatsen att det finns $c \in (0, 1)$ så att

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 1$$

och därmed antar f' värdet 1 i detta fall.

Fall 2: Om $t \neq 1$ så gäller $t < 1$. Från medelvärdessatsen får vi då att det finns ett $d \in (0, t)$ så att

$$f'(d) = \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \frac{1}{t} > 1.$$

Vidare vet vi då att eftersom $f(t) = 1$ och fs maxvärde är 1, så antar f ett maxvärde i $x = t$. Därmed gäller $f'(t) = 0$. Eftersom f' är kontinuerlig antar f alla värden mellan $f'(t) = 0$ och $f'(d) > 1$. Värdet 1 ligger däremellan. Alltså antar f' värdet 1 någonstans även i detta fall.