UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Erik Lindgren

Tentamen i matematik
Envariabelanalys för M, 1MA210
14 januari 2021

Skrivtid: 9:00–14:00. Tillåtna hjälpmedel: **skrivdon, kursboken, kompendium och föreläsningsanteckningar**.
Antal uppgifter är 10. Det maximala antalet poäng för varje uppgift är 5 p. Alla svar ska motiveras med lämpliga beräkningar eller med en hänvisning till lämplig teori. Skriv din tentakod på varje ark. Betygsgränserna är: 0-21= Betyg U, 22-35= Betyg 3, 36-42= Betyg 4, 43-50= Betyg 5. Eventuella bonuspoäng räknas vid minst 20 poäng på tentan.

1. Betrakta gränsvärdet
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{f(x)}.$$
   a) Ange ett polynom f så att gränsvärdet existerar och är lika med 0.
   b) Ange ett polynom f så att gränsvärdet existerar och är lika med 1.

2. Låt $f(x) = xe^{-x}$ för $x \geq 0$. Gör en enkel skiss av funktionsgrafen $y = f(x)$. Bestäm den punkt (x_0, y_0) på funktionsgrafen som gör arean av triangeln med hörn i $(0, 0)$, $(x_0, 0)$ och (x_0, y_0) maximal.

–Var god vänd–

3. Bestäm

$$\int \frac{2x^2-4}{x^2(x-2)}dx.$$

4. Bestäm den totala arean av den yta som omsluter kroppen som uppstår när (det ändliga) området som begränsas av kurvan $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ och linjerna $x = 0$ och $y = 2/3$ roterar kring y-axeln.

   OBS: Notera att *ytan* består av flera delar.

5. Bestäm för vilka x potensserien

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{2^k k}$$

   konvergerar och vilka för x den divergerar.

6. Låt $a_{n+1} = a_n^{a_n}$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$ och $a_1 = \frac{2}{3}$. Avgör om

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

   existerar och bestäm i så fall gränsvärdet.

7. Låt $f(x) = xg(x)$ där g är kontinuerlig på $[-10, 10]$.

   a) Visa att $f(x)$ är deriverbar i $x = 0$ mha av definitionen av derivata och bestäm $f'(0)$.

   b) Ge ett exempel på en funktion g (som uppfyller kravet ovan) som gör att f ej är deriverbar i $x = 1$.

–Var god vänd–

8. Ge exempel på (och förklaring varför):

   a) En deriverbar funktion som ej är två gånger deriverbar.

   b) En kontinuerlig funktion på $[1, \infty)$ som ej är likformigt kontinuerlig på $[1, \infty)$.

   c) En följd som är konvergent men som varken är monotont växande eller monotont avtagande.

9. Visa med hjälp av definitionen att funktionen $f(x) = \ln x$ är integrerbar på $[1, e]$.

   Tips: Dela t ex upp intervallet enligt $x_i = e^{\frac{i}{n}}$, $i = 0, \ldots, n$.

10. Antag att f är en funktion som är tre gånger kontinuerligt deriverbar på $[-1, 1]$. Visa följande:

    a) Om $f(0) = f'(0) = 0$ så är serien

    $$\sum_{k=1}^{\infty} f(1/k)$$

    konvergent.

    b) Om serien

    $$\sum_{k=1}^{\infty} f(1/k)$$

    är konvergent så gäller $f(0) = f'(0) = 0$.

Lycka till!