UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Erik Lindgren

Lösning till Tentamen i matematik
Envariabelanalys för M, 1MA210
14 januari 2021

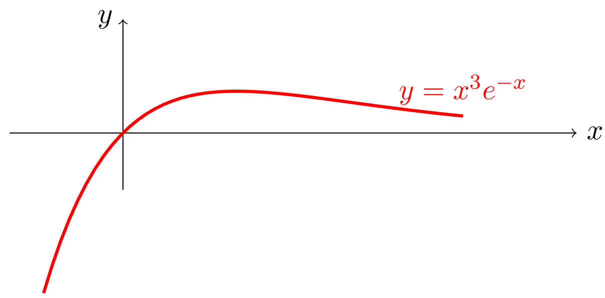
1. a) Eftersom $e^x - 1 - x \to 0$ då $x \to 0$ så är $f(x) = 1$ ett möjligt val.

   b) Från Taylor-utvecklingen av e^x följer att $e^x = 1 + x + x^2/2 + \mathcal{O}(x^3)$ och därmed

$$\frac{e^x - 1 - x}{x^2/2} = 1 + \mathcal{O}(x).$$

   Från detta följer det att $f(x) = x^2/2$ är ett möjligt val.

2. Triangeln i fråga kommer ha hörn i punkterna $(0,0)$, $(t,0)$ och (t, te^{-t}) om vi låter $t = x_0$. Denna har arean $t^2e^{-t}/2$ areaenheter. Vi kan lika gärna studera när funktionen $f(t) = t^2e^{-t}$ antar sitt största värde. Vi har $f(0) = 0$ och $f(t) \to 0$ då $t \to \infty$. Eftersom $f(t) > 0$ för $t > 0$ så följer det att f antar ett positivt max. Vi söker efter kritiska punkter: $f'(t) = (t-2)te^{-t}$. Således är $t = 2$ den enda kritiska punkten och detta måste vara ett max. Värdet $t = 2$ svarar mot punkten $(2, 2e^{-2})$ och arean $4/e^2$ areaenheter.



3. Vi börjar med partialbråksuppdelning. Vi ansätter

$$\frac{2x^2-4}{x^2(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-2}.$$

Förlängning ger

$$2x^2 - 4 = Ax(x-2) + B(x-2) + Cx^2.$$

Sätter vi in $x = 0$ får vi direkt $B = 2$ och $x = 2$ ger $C = 1$. Räknar vi sedan antal x^2 på bägge sidor får vi $2 = A + C$ vilket ger $A = 1$. Alltså har vi

$$\frac{2x^2-4}{x^2(x-2)}$$

Integration ger då

$$\int \frac{2x^2-4}{x^2(x-2)}dx = \int \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x-2}dx = \ln|x| - \frac{2}{x} + \ln|x-2| + C.$$

4. Ytan består dels av det som uppstår när funktionens graf roteras kring y-axeln (mantelytan) och ytan på toppen av denna trattliknande kropp. Med $f(x) = 2/3x^{\frac{3}{2}}$ ges rotationsytans area ges av

$$\begin{aligned}
A = \int_0^1 2\pi x\sqrt{1+(f(x)')^2}dx &= 2\pi \int_0^1 x\sqrt{1+x}dx \\
&= 2\pi \int_0^1 (x+1)^{\frac{3}{2}} - (x+1)^{\frac{1}{2}}dx \\
&= 2\pi \left[\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 \\
&= 2\pi \left(\frac{2}{5}(2)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} + \frac{2}{3}\right) \\
&= \frac{8\pi}{15}\left(\sqrt{2}+1\right)
\end{aligned}$$

areaenheter.

Toppen av ytan är en cirkelskiva med radien 1 längdenhet. Denna har då arean π areaenheter.

Den totala arean är då summan av dessa, vilket blir

$$\frac{8\pi}{15}\left(\sqrt{2}+1\right) + \pi \text{ areaenheter.}$$

5. Kvottestet ger att konvergensradien är

$$\lim_{k\to\infty} \frac{2^{k+1}(k+1)}{2^k k} = \lim_{k\to\infty} 2\left(\frac{1}{k}+1\right) = 2.$$

Detta medför att serien är absolutkonvergent och därmed konvergent för $|x| < 2$.

Vi testar de olika fallen $x = \pm 2$ separat.

Om $x = 2$ får vi serien

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}$$

som är divergent, t ex eftersom integralen

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}dx$$

är divergent.

Om $x = -2$ får vi serien

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

som är konvergent pga Leibniz konvergenstest för alternerande serier.

Vi sammanfattar: Serien konvergerar för $x \in [-2, 2)$ och divergerar annars.

6. Låt $f(x) = x^x$. Då har vi $a_{n+1} = f(a_n)$. Vi ser att f är en växande funktion för $x > 1/e$ och att $f(1) = 1$. Därför har vi att $f(1/e) \leq f(x) \leq 1$ om $1/e < x \leq 1$. Eftersom $a_1 = 2/3 > 1/e$ följer det att $1/e < f(1/e) < a_n \leq 1$ för alla n. Vidare ser vi att $a_2 = (2/3)^{2/3} > 2/3$. Vi visar nu att a_n är växande genom induktion. Antag att $a_{n+1} \geq a_n$. Då gäller att $a_{n+2} = f(a_{n+1}) \geq f(a_n) = a_{n+1}$ eftersom f är växande. Alltså är a_n växande. Då a_n även är begränsad ovanifrån medför det att gränsvärdet

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n$$

existerar. Vidare måste a uppfylla $a = a^a$. Detta ger att $a = 1$.

7. a) Vi har

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} g(h) = g(0)$$

eftersom g är kontinuerlig. Alltså gäller enligt definitionen att $f'(0) = g(0)$.

b) Välj t ex $g(x) = |x - 1|$. Då ser vi att fs höger- och vänsterderivator i $x = 1$ är ± 1. Således är f ej deriverbar i $x = 1$.

8. a) T ex funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

Vi har då att $f'(x) = 2x$ om $x \geq 0$ och 0 annars. Genom att studera gränsvärdet som då definierar andraderivatan i $x = 0$ ser man att andraderivatan ej existerar i $x = 0$.

b) T ex $f(x) = x^2$.

c) T ex föjden $(\sin n)/n$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$

9. Det räcker att visa att det finns följder av över- och undertrappfunktioner Φ_n och Ψ_n så att
$$\int_0^1 \Phi_n - \Psi_n dx \to 0,$$
då $n \to \infty$. Låt n vara ett positivt heltal och låt $x_k = e^{k/n}$ för $k = 0, \ldots, n$. Vi har då
$$x_k - x_{k-1} = e^{k/n}(1 - e^{-1/n}).$$
Eftersom $f(x)$ är växande så kan vi välja följande över- och undertrappfunktioner:
$$\Phi_n(x) = f(x_k) \text{ för } x \in [x_{k-1}, x_k]$$
och
$$\Psi_n(x) = f(x_{k-1}) \text{ för } x \in [x_{k-1}, x_k].$$
Vi har då
$$\int_0^1 \Phi_n(x)dx = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)/n = \sum_{k=1}^{n} e^{k/n}(1 - e^{-1/n})\frac{k}{n}.$$
På samma sätt har vi
$$\int_0^1 \Psi_n(x)dx = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})/n = \sum_{k=1}^{n} e^{k/n}(1 - e^{-1/n})\frac{k-1}{n}.$$
Därför får vi
$$\begin{aligned}\int_0^1 \Phi_n(x) - \Psi_n dx &= \sum_{k=1}^{n} e^{k/n}(1 - e^{-1/n})\frac{1}{n} \\ &= (1 - e^{-1/n})\frac{1}{n}e^{1/n}\frac{e-1}{e^{1/n}-1} \\ &= \frac{e-1}{n} \\ &\to 0\end{aligned}$$
då $n \to \infty$. Alltså har vi visat att funktionen är integrerbar.

10. a) Eftersom $f(0) = f'(0)$ och f har kontinuerliga derivator upp till ordning tre så har vi

$$f(x) = \frac{1}{2} f''(0) x^2 + \mathcal{O}(x^3) \quad x \to 0.$$

Därför har vi

$$f(1/k) = \frac{1}{2} f''(0) k^{-2} + \mathcal{O}(k^{-3}) \quad k \to \infty.$$

Vi använder nu jämförelsetestet för serier med serien $1/k^2$ som vi vet är konvergent. Enligt formeln ovan följer det att $f(1/k)$ har konstant tecken för k stort nog eftersom andra ordningens termen dominerar. Därför kan vi använda jämförelsetestet. Vi har

$$\frac{f(1/k)}{k^{-2}} = \frac{1}{2} f''(0) + \mathcal{O}(k^{-1}) \to \frac{1}{2} f''(0).$$

Alltså har vi att om $\sum 1/k^2$ konvergerar så konvergerar även $\sum f(1/k)$. Alltså konvergerar serien.

b) Antag att serien konvergerar. Eftersom $f(0) = f'(0)$ och f har kontinuerliga derivator upp till ordning tre så har vi

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(0) x^2 + \mathcal{O}(x^3) \quad x \to 0.$$

eller

$$f(1/k) = f(0) + f'(0) k^{-1} + \frac{1}{2} f''(0) k^{-2} + \mathcal{O}(k^{-3}) \quad k \to \infty.$$

Om serien $\sum f(1/k)$ konvergerar gäller $f(1/k) \to 0$. Detta tvingar $f(0) = 0$. Vi jämför med serien $\sum 1/k$. Denna vet vi är divergent. Vi har

$$\frac{f(1/k)}{k^{-1}} = f'(0) + \frac{1}{2} f''(0) k^{-1} + \mathcal{O}(k^{-2}) \to f'(0).$$

Om $f'(0) \neq 0$ så ger jämförelsen att $\sum f(1/k)$ divergerar. Alltså måste vi ha $f'(0) = 0$.