UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Erik Lindgren

Lösning till Tentamen i matematik
Envariabelanalys för M, 1MA210
10 juni 2021

1. a) Eftersom $\ln(1+x) \to 0$ då $x \to 0$ kan vi välja f till den konstanta funktionen 1.

   b) Vi använder följande Tayloruppskattning:

$$\ln(1+x) = x - x^2/2 + \mathcal{O}(x^3).$$

   Med valet $f(x) = -x^2/2$ får vi då efter att ha förkortat med $-x^2/2$

$$\frac{\ln(1+x) - x}{-x^2/2} = 1 + \mathcal{O}(x) \to 0.$$

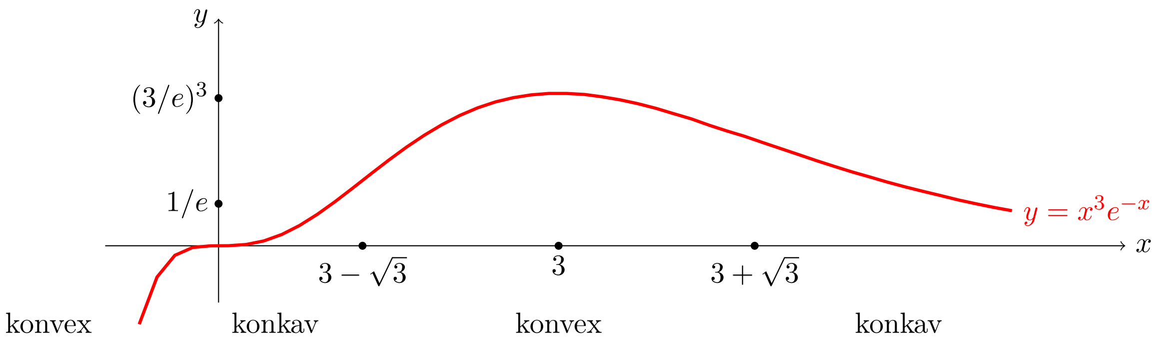
   Således är detta val av f ok.

2. Med $f(x) = x^3 e^{-x}$ så har vi $f'(x) = x^2 e^{-x}(3-x)$ och $f''(x) = xe^{-x}(x^2 - 6x + 6)$. Kritiska punkter är då $x = 0$ och $x = 3$. Vi kan också sluta oss till att $f' > 0$ om $0 < x < 3$ och $x < 0$, och att $f' < 0$ om $x > 3$. Vidare har vi att $f'' < 0$ om $x < 0$ eller $x \in (3-\sqrt{3}, 3+\sqrt{3})$ och $f'' > 0$ om $x \in (0, 3-\sqrt{3})$ eller $x > 3+\sqrt{3}$. Vi ser också att vi har gränsvärdena

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

   Alltså har vi en horisontell asymptot då $x \to \infty$. Vi tar också fram att $f(0) = 0$, $f(1) = (1/e) \approx 1/3$ och $f(3) = (3/e)^3 \approx (1.1)^3 \approx 1.3$.

   Då vet vi nu att f är sträng avtagande till höger om $x = 3$ och strängt växande till vänster om $x = 3$. Den enda möjliga extrempunkten är då i $x = 3$ vilket måste vara ett globalt max. Då gränsvärdet är $-\infty$ då $x \to -\infty$ antar f ej något min. Alltså maxvärdet är $f(3) = (3/e)^3$ och minvärde finns ej. Vi vet även var f är konkav resp konvex från tecknet på f'' ovan. Vi kan då skissa upp följande:



3. a) Vi utför variabelbytet $t = x^2$ och får $dt = 2xdx$ vilket ger

$$\int \frac{x\cos(x^2)}{\sin(x^2)}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{\cos t}{\sin t}dt = \frac{1}{2}\ln|\sin t| + C$$

eftersom $(\sin t)' = \cos t$. Uttryckt i x igen får vi slutligen

$$\int \frac{x\cos(x^2)}{\sin(x^2)}\,dx = \frac{1}{2}\ln|\sin x^2| + C.$$

b) Vi partialintegrerar och får

$$\int_1^{\sqrt{e}} x\ln x dx = -\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{2}xdx + \left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^{\sqrt{e}} = \left[\frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2\right]_1^{\sqrt{e}}$$

Förenklat blir detta

$$\frac{1}{4}\left[x^2(2\ln x - 1)\right]_1^{\sqrt{e}} = \frac{1}{4}.$$

4. a) Vi har med

$$f(t) = \frac{\sin t}{t^2}, \quad g(t) = 1/t$$

att

$$\lim_{t \to 0^+} f(t)/g(t) = 1, \quad f(t) \geq 0 \quad \text{för } t \in (0, 1].$$

Vidare vet vi att integralen

$$\int_0^1 g(t)dt$$

divergerar till ∞. Pga jämförelse för generaliserade integraler divergerar även integralen av f.

b) Från Taylor's sats för e^x har vi att

$$e^x = 1 + x + x^2/2 + x^3/3! + x^4/4! + e^c x^5/5!, \quad c \in [0, x].$$

Därför gäller för $x > 0$ att

$$e^x \geq x^4/4!.$$

Detta medför

$$\frac{|x^2 \sin x|}{e^x} \leq \frac{x^2}{x^4/4!} = 4! x^{-2}.$$

Eftersom integralen

$$\int_2^\infty x^{-2} dx$$

konvergerar så konvergerar även integralen

$$\int_2^\infty \frac{x^2 \sin x}{e^x} \, dx.$$

5. Vi ser att $g'(x) = 1 + 1/x > 1$ då $x \in [1, \infty)$. Således är g strängt växande på $[1, \infty)$. och därmed inverterbar där. För att bestämma integralen använder vi substitutionen $x = h(t)$ eller $t = g(x)$ vilket ger $dt = g'(x)dx$ och därmed

$$\int_1^{e+1} h(t)dt = \int_{h(1)}^{h(1+e)} x g'(x) dx = \int_1^e (x+1)dx = [x^2/2 + x]_1^e = e^2/2 + e - 3/2.$$

där vi använt att $h(1) = 1$ och $h(1+e) = e$ eftersom $g(1) = 1$ och $g(e) = 1 + e$.

6. Vi använder Taylorpolynom av grad 6 för $\cos x$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6 \cos t}{6!}, t \in (0, x).$$

Substitutionen $x \mapsto x^3$ ger då

$$\cos x^3 = 1 - \frac{x^6}{2} + \frac{x^{12}}{24} - \frac{x^{18} \cos t}{6!}, t \in (0, x^3),$$

vilket medför

$$\Big| \cos x - 1 + \frac{x^6}{2} - \frac{x^{12}}{24} \Big| = \Big| - \frac{x^{18} \cos t}{6!} \Big| \leq \frac{x^{18}}{6!}.$$

Detta ger

$$\Big| \int_0^1 \left(\cos(x^3) - 1 + \frac{x^6}{2} - \frac{x^{12}}{24} \right) dx \Big| \leq \int_0^1 \frac{x^{18}}{6!} dx = \frac{1}{19 \cdot 6!}.$$

Vidare gäller

$$\frac{1}{19 \cdot 6!} = \frac{1}{19 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} < \frac{1}{1000}.$$

Detta ger ett fel som uppfyller det efterfrågade kriteriet. Räknar vi ut integralen får vi

$$\Big| \int_0^1 \left(\cos(x^3) - 1 + \frac{1}{14} - \frac{1}{13 \cdot 24} \right) dx \Big| < 10^{-3}.$$

7. Enligt kvotkriteriet kan vi hitta konvergensradien genom att studera

$$\lim_{k \to \infty} \frac{(k+1) \ln(k+1)}{k \ln k} = \lim_{k \to \infty} \frac{\ln\left(k(1+1/k)\right)}{\ln k} = \lim_{k \to \infty} \frac{\ln k + \ln(1+1/k)}{\ln k} = 1$$

eftersom $\ln(1 + 1/k) \to 0$. Därför konvergerar serien tom absolut om $|x| < 1$ och divergerar om $|x| > 1$. Vi testar de olika fallen $x = \pm 1$ separat.

Om $x = 1$ får vi serien

$$\sum_2^\infty \frac{1}{k \ln k}$$

som inte är konvergent enligt integraltestet för serien eftersom integralen

$$\int_2^\infty \frac{1}{x \ln x} dx = \{t = \ln x, dt = dx/x\} = \int_{\ln 2}^\infty \frac{1}{t} dt$$

inte konvergerar. Alltså kan inte serien vara konvergent i detta fall.

Om $x = -1$ får vi serien

$$\sum_2^\infty \frac{(-1)^k}{k \ln k}$$

som är konvergent enligt Leibniz test eftersom den är alternerande och absolutbeloppet av termerna är avtagande.

Vi sammanfattar: Serien konvergerar för $x \in [-1, 1)$ och divergerar annars.

8. a) Vi säger att f är deriverbar i $x = a$ om gränsvärdet

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existerar. Gränsvärdets värde är då $f'(a)$.

b) Eftersom $f(0) = 0$ och $f'(0) = 3$ så gäller enligt a) att

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = f'(0) = 3.$$

Detta betyder då att

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{f(2x)}{x} = 2 \lim_{x\to 0} \frac{f(2x)}{2x} = 2 \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = 2f'(0) = 2 \cdot 3 = 6.$$

9. a) T ex följden $\{-(2)^n\}$.

b) T ex följden $\{(-1/2)^n\}$.

c) T ex funktionen $f(x) = 1/(x-1)$.

d) T ex funktionen $f(x) = |x|$.

e) T ex funktionen

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x \in [0,1], \\ -2 & x \in [-1,0). \end{cases}$$

10. Antag att linjesegmentet skär fs graf i punkten $(a, f(a))$. Medelvärdessatsen tillämpad på intervallen $(0, a)$ och $(a, 1)$ ger att det finns två punkter $t \in (0, a)$ och $s \in (a, 1)$ så att

$$\frac{f(a) - f(0)}{a} = f'(t), \quad \frac{f(1) - f(a)}{1-a} = f'(s).$$

Eftersom de två linjesegmenten som går mellan $(0, f(0))$ och $(a, f(a))$ och mellan $(a, f(a))$ och $(1, f(1))$ ligger längs samma linje så gäller då att lutningen är den samma längs de två segmentet, alltså gäller $f'(t) = f'(s)$. Medelvärdessatsen tillämpad på (t, s) ger då att det finns en punkt $c \in (t, s) \subset [0, 1]$ så att

$$f''(c) = \frac{f'(t) - f'(s)}{t - s} = 0.$$