UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Erik Lindgren

Lösning till Tentamen i matematik
Envariabelanalys för M, 1MA210
24 augusti 2021

1. a) Eftersom $\sin x - x \to 0$ då $x \to 0$ kan vi t ex välja f till den konstanta funktionen 1.

   b) Vi använder följande Tayloruppskattning:

$$\sin x = x - x^3/6 + \mathcal{O}(x^5).$$

   Med valet $f(x) = -x^3/6$ får vi då efter att ha förkortat med $-x^3/6$

$$\frac{\sin x - x}{-x^3/6} = 1 + \mathcal{O}(x^2) \to 1.$$

   Således är detta val av f ok.

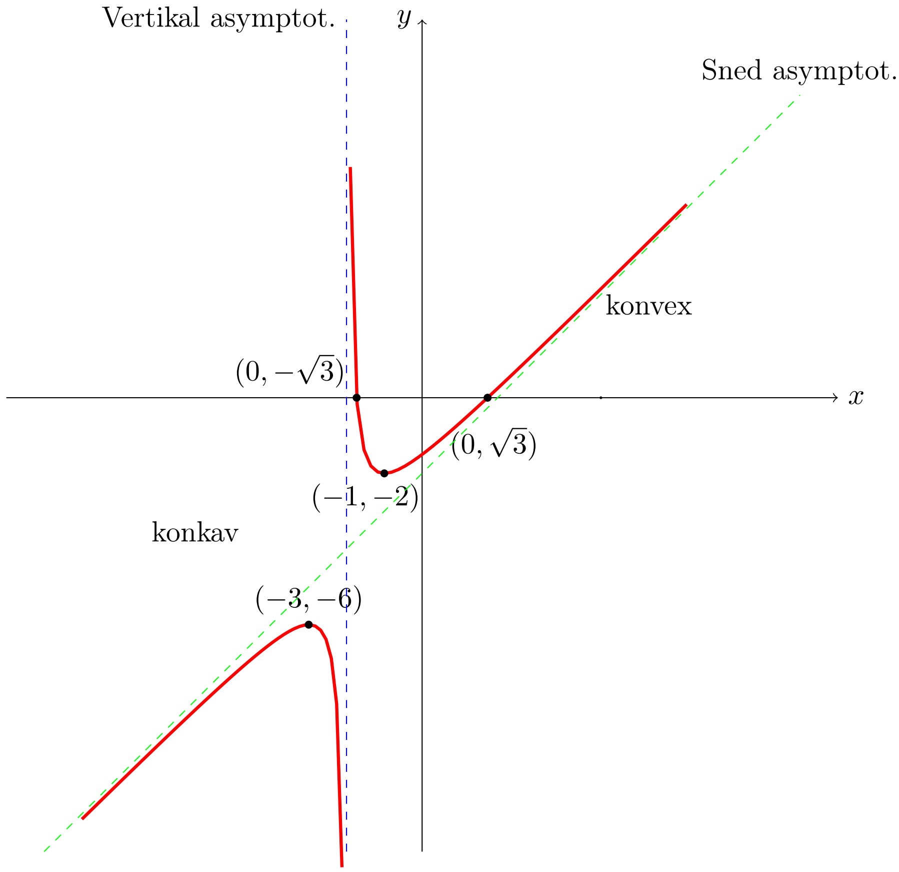
2. Med $f(x) = (x^2 - 3)/(x + 2) = x - 2 + 1/(x + 2)$ så ser vi att f har en verikal asymptot i $x = -2$ och en sned asymptot $x - 2$ då $x \to \pm\infty$. Således antar inte f något största eller minsta värde. Vidare är funktionen ej definierad i $x = -2$. Vi har

$$f'(x) = 1 - (x + 2)^{-2}.$$

   Kritiska punkter är då $x = -1$ och $x = -3$. Undersöker vi tecknet hos derivatan ser vi att $f' > 0$ då $|x + 2| > 1$ och $f' < 0$ då $|x + 2| < 1$. Detta ger att f antar ett lokalt max i $x = -3$ och ett lokalt min i $x = -1$. Vi har också

$$f''(x) = 2(x + 3)^{-3}$$

   så att f är konvex för $x > -2$ och konkav för $x < -2$. Vi bestämmer skärningspunkterna med axlarna: $(0, -3/2)$ och $(\pm\sqrt{3}, 0)$. Vi har även $f(-1) = -2$ och $f(-3) = -6$. Vi kan då skissa upp följande:



3. a) Vi partialintegrerar genom att integrera x och derivera $\arctan x$. Detta ger

$$\int x \arctan x \, dx = -\frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x^2+1} dx + \frac{1}{2} x^2 \arctan x.$$

Vidare har vi eftersom $x^2/(x^2+1) = 1 - 1/(x^2+1)$ att

$$-\frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x^2+1} dx = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \arctan x + C$$

Summerar vi får vi

$$\int x \arctan x \, dx = \frac{1}{2} \left(1 + x^2\right) \arctan x - \frac{x}{2} + C.$$

b) Använder vi partialbråksuppdelning får vi

$$\frac{2x+4}{x^2+4x+3} = \frac{2x+4}{(x+1)(x+3)} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+3}.$$

Därmed får vi

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{2x+4}{x^2+4x+3}dx &= \int_0^1 \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+3}dx \\ &= \Big[\ln(x+1) + \ln(x+3)\Big]_0^1 \\ &= \ln 2 + \ln 4 - \ln 1 - \ln 3 \\ &= \ln(8/3).\end{aligned}$$

4. Enligt formeln för rotationsvolymer får vi

$$V = \pi \int_2^\infty \left(\frac{1+\cos x}{x^4 - x}\right)^2 dx.$$

Vi observerar att $x^4 \geq 2x$ och därmed $x^4/2 \geq x$ då $x \geq 2$. Således har vi

$$\left(\frac{1+\cos x}{x^4 - x}\right)^2 \leq \left(\frac{2}{\frac{1}{2}x^4}\right)^2 = 8x^{-8},$$

där vi också använt att $|1 + \cos x| \leq 2$. Eftersom integralen

$$\int_2^\infty x^{-8} dx$$

är konvergent så är även integralen

$$\int_2^\infty \left(\frac{1+\cos x}{x^4 - x}\right)^2 dx$$

konvergent, enligt jämförelsesatsen för generaliserade integraler, där vi också använt att integranden är icke-negativ.

5. a) Vi ser att serien är alternerande pga faktorn $(-1)^k$ och eftersom $k \mapsto (k + k^{\frac{1}{3}})^{-1}$ är avtagande, så har termerna avtagande absolutbelopp som också går mot noll. Därmed ger Lebniz sats för alternerande serier att serien är konvergent.

b) Vi använder att $e^{k/2} \geq k$ och att $|\sin k| \leq 1$. Detta ger

$$\left|\frac{k \sin k}{e^k}\right| \leq e^{-k/2}.$$

Serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k/2}$$

är en konvergent geometrisk serie. Enligt jämförelsetestet så är serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \sin k}{e^k}$$

absolutkonvergent och därmed konvergent.

6. a) Vi säger att

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A$$

om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett $R < 0$ så att $x < R$ implicerar att

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

b) Tag $\varepsilon > 0$, vi vill då visa att det finns $R < 0$ så att om $x < R$ så har vi

$$\left|\frac{1}{x^2 + 2}\right| < \varepsilon.$$

Om vi väljer $R = -1/\sqrt{e}$ ser vi att vi får

$$\left|\frac{1}{x^2 + 2}\right| \leq \left|\frac{1}{x^2}\right| < \frac{1}{R^2} = \varepsilon.$$

Alltså har vi visat att att det finns ett sådant R.

7. Låt $f(x) = \sqrt{100 + x}$. Då har vi $f(0) = 10$, $f(1) = \sqrt{101}$ och

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{100 + x}}, \quad f''(x) = -\frac{1}{4}(100 + x)^{-3/2}.$$

Taylors sats ger då

$$f(1) - 10 - \frac{1}{2\sqrt{100}} = -\frac{1}{8}(100 + t)^{-3/2}$$

för något $t \in (0, x)$. Tar vi absolutbeloppet ger detta

$$|f(1) - 10 - \frac{1}{20}| = \frac{1}{8}(100+t)^{-3/2} \leq \frac{1}{8}100^{-3/2} = \frac{1}{8000} < \frac{1}{1000}.$$

Således är

$$\sqrt{101} = f(1) \approx 10 + \frac{1}{20}$$

en approximation som är god nog.

8. Låt $f(x) = (2x+1)/(x+2) = (2x+4-3)/(x+2) = 2-3/(x+2)$. Då gäller $a_n = f(a_{n-1})$. Vidare är f växande och $0 \leq f(x) \leq 2$ för $x \geq 0$. Vi har $a_1 = f(1/2) = 4/5$. Vi visar nu genom induktion att a_n är växande. Antag att $a_n \geq a_{n-1}$ då följer att

$$a_{n+1} = f(a_n) \geq f(a_{n-1}) = a_n$$

där vi använt att f är växande. Eftersom $a_1 > a_0$ så är följden a_n växande. Vidare, eftersom $0 \leq f(x) \leq 2$ för $x \geq 0$ och $a_0 \geq 0$ så är följden a_n begränsad. Då har a_n ett gränsvärde, som vi kallar a. Låter vi $n \to \infty$ får vi då ur relationen $a_n = f(a_{n-1})$ att $a = f(a)$ eller utskrivet

$$a = \frac{2a+1}{a+2}$$

vilket ger

$$a^2 + 2a = 2a + 1$$

så att vi får $a = \pm 1$. Men eftersom följden aldrig blir negativ så måste gränsvärdet vara 1. Slutsatsen blir alltså att $a_n \to 1$.

9. a) T ex funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$

b) T ex funktionen $f(x) = x$.

c) T ex funktionen

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x \text{ rationellt} \\ 0 & x \text{ ej rationellt} \end{cases}$$

d) T ex följden $1, 2, 3, \ldots$.

e) T ex följden $(-1)^n, n = 1, 2, 3, \ldots$.

10. Vi använder integralkalkylens medelvärdessats. Denna ger att det finns $s \in [0, 1]$ och $t \in [0, 10]$ så att

$$f(s) = \int_0^1 f(x)dx = 1, \quad 10f(t) = \int_0^{10} f(x)dx = 2.$$

Således antar funktionen f värdena 1 och 2/10=1/5. Eftersom f är kontinuerlig antar den alla värden i intervallet $[1/5, 1]$, enligt satsen om mellanliggande värde. Då $1/2$ ligger i intervallet har vi visat att det f antar värdet $1/2$.