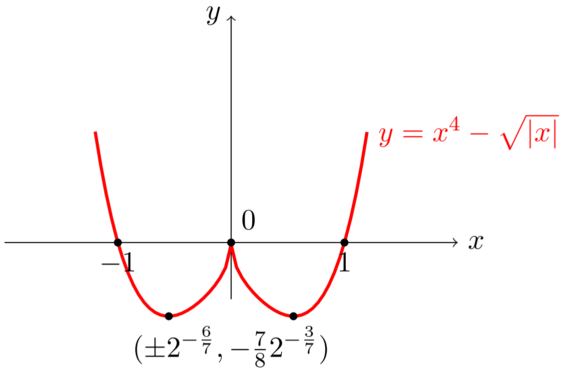
UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Erik Lindgren

Lösning till Tentamen i matematik
Envariabelanalys för M, 1MA210
13 januari 2022

1. a) Eftersom $\cos x$ går mot 1 då $x \to 0$ så kan vi helt enkelt välja $f(x) = 1$. Då reduceras uttrycket till
$$\lim_{x\to 0} \cos x - 1 = 0.$$
b) Vi använder följande Tayloruppskattning kring $x = 0$.
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4).$$
Detta leder till
$$\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4).$$
Vi ser då att valet $f(x) = -\frac{x^2}{2}$ fungerar eftersom vi då får
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{-\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4)}{-\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + \mathcal{O}(x^2)}{1} = 1.$$

2. Med $f(x) = x^4 - \sqrt{|x|}$ så har vi $f'(x) = 4x^3 - \frac{1}{2}|x|^{-\frac{1}{2}}\text{sgn}x$ då $x \neq 0$ och $f''(x) = 12x^2 + \frac{1}{4}|x|^{-\frac{3}{2}}$ för $x \neq 0$. Kritiska punkter är då $x = \pm 2^{-\frac{6}{7}}$. Vi kan också sluta oss till att $f' > 0$ om $-2^{-\frac{6}{7}} < x < 0$ och om $x > 2^{-\frac{6}{7}}$, och att $f' < 0$ om $0 < x < 2^{-\frac{6}{7}}$ och om $x < -2^{-\frac{6}{7}}$. Vidare har vi att $f'' > 0$ för $x \neq 0$. Vi ser också att vi har gränsvärdena
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty.$$
Vi tar också fram att $f(0) = 0$, $f(\pm 1) = 0$ och $f(\pm 2^{-\frac{6}{7}}) = -\frac{7}{8}2^{-\frac{3}{7}} \approx -0.7$. Då vet vi nu att f är strängt avtagande om $0 < x < 2^{-\frac{6}{7}}$ och om $x < -2^{-\frac{6}{7}}$ och strängt växande om $-2^{-\frac{6}{7}} < x < 0$ och om $x > 2^{-\frac{6}{7}}$. De enda möjliga extrempunkterna är då i $x = \pm 2^{-\frac{6}{7}}$ vilket måste vara ett globalt min och i $x = 0$ där derivatan ej existerar vilket är ett lokalt max. Då gränsvärdet är $+\infty$ då $x \to \pm\infty$ antar f ej något max. Alltså minvärdet är $f(\pm 2^{-\frac{6}{7}})$ och maxvärde finns ej. Vi vet även att f är konvex för $x > 0$ och $x < 0$ från tecknet på f'' ovan. Vi kan då skissa upp följande:



3. a) Vi använder partialintegration och får

$$\int_0^1 \arcsin x dx = -\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx + \Big[x \arcsin x\Big]_0^1 = \Big[\sqrt{1-x^2}\Big]_0^1 + \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

b) Vi använder partialbråksuppdelning och skriver

$$\frac{1}{x^2+6x+8} = \frac{1}{2}\frac{1}{x+2} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+4}$$

och får därmed

$$\int \frac{1}{x^2+6x+8} dx = \int \left(\frac{1}{2}\frac{1}{x+2} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+4}\right) dx = \frac{1}{2} \ln \left|\frac{x+2}{x+4}\right| + C$$

4. Vi har formeln för generell funktiongraf $f(x)$ med intervall $[a,b]$:

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx.$$

I detta fall får vi då

$$V = \int_0^\infty \frac{2\pi x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = 2\pi \Big[- \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} \Big]_0^\infty = 2\pi \text{ volymenheter.}$$

5. Enligt kvotkriteriet kan vi hitta konvergensradien genom att studera

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)\ln(k+1)}{k \ln k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\ln(k(1+1/k))}{\ln k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\ln k + \ln(1+1/k)}{\ln k} = 1$$

eftersom $\ln(1+1/k) \to 0$. Därför konvergerar serien tom absolut om $|x| < 1$ och divergerar om $|x| > 1$. Vi testar de olika fallen $x = \pm 1$ separat.

Om $x = 1$ får vi serien

$$\sum_2^\infty \frac{1}{k \ln k}$$

som inte är konvergent enligt integraltestet för serien eftersom integralen

$$\int_2^\infty \frac{1}{x \ln x} dx = \{t = \ln x, dt = dx/x\} = \int_{\ln 2}^\infty \frac{1}{t} dt$$

inte konvergerar. Alltså kan inte serien vara konvergent i detta fall.

Om $x = -1$ får vi serien

$$\sum_2^\infty \frac{(-1)^k}{k \ln k}$$

som är konvergent enligt Leibniz test eftersom den är alternerande och absolutbeloppet av termerna är avtagande.

Vi sammanfattar: Serien konvergerar för $x \in [-1, 1)$ och divergerar annars.

6. Med $f(x) = 1/(4-x)$ så har vi $a_n = f(a_{n-1})$. Funktionen $f(x)$ har derivata $f'(x) = (4-x)^{-2} \geq 0$. Således är f växande. Vi undersöker nu om följden är avtagande genom induktion. Vi ser att
$$a_1 = \frac{1}{4-\frac{1}{2}} = \frac{2}{7} < \frac{1}{2} = a_0.$$
Antag nu att $a_n \leq a_{n-1}$ för $n = 1, \ldots, k$. Då gäller
$$a_{k+1} = f(a_k) \leq f(a_{k-1}) = a_k.$$
Således gäller även $a_{k+1} \leq a_k$ och därmed är följden avtagande. Det följer då att $a_n \leq a_0 = \frac{1}{2}$ och eftersom $f(x) \geq 0$ för $x \leq 4$ så gäller då att $a_n \geq 0$. Alltså är följden avtagande och begränsad underifrån (av 0). Enligt sats så är a_n konvergent mot något tal a. Låter vi $n \to \infty$ i
$$a_n = f(a_{n-1})$$
så får vi
$$a = f(a) = \frac{1}{4-a}.$$
Detta ger
$$1 + a^2 - 4a = 0.$$
Denna ekvation har lösningarna $a = 2 \pm \sqrt{3}$. Eftersom följden är avtagande måste $a < \frac{1}{2}$ vilket ger att den sökta roten är $a = 2 - \sqrt{3}$. Alltså, följden är konvergent och konvegerar mot $2 - \sqrt{3}$.

7. a) Vi säger att f är deriverbar i $x = a$ om gränsvärdet
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$
existerar. Gränsvärdets värde är då $f'(a)$.

b) Eftersom $f(0) = 0$ och $f'(0) = 6$ så gäller med $\phi(x) = f(\ln(1 + x/2))$ att $\phi(0) = 0$ och
$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\phi(x)}{2x} = \frac{1}{2}\phi'(0).$$
Eftersom
$$\frac{d}{dx} \ln(1 + x/2) = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + x/2}$$
ger kedjeregeln
$$\phi'(0) = f'(0) \frac{1}{2} \frac{1}{1 + x/2}\Big|_{x=0} = \frac{6}{2} = 3.$$
Således
$$\lim_{x \to 0} g(x) = 3/2.$$

8. Det räcker att visa att det finns följder av över- och undertrappfunktioner Φ_n och Ψ_n så att

$$\int_0^1 \Phi_n - \Psi_n dx \to 0,$$

då $n \to \infty$. Integralen av f är då lika med

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \Phi_n(x)dx.$$

Låt n vara ett positivt heltal och låt $x_k = k/n$ för $k = 0, \ldots, n$. Eftersom $f(x)$ är växande så kan vi välja följande över- och undertrappfunktioner:

$$\Phi_n(x) = f(x_k) \text{ för } x \in [x_{k-1}, x_k]$$

och

$$\Psi_n(x) = f(x_{k-1}) \text{ för } x \in [x_{k-1}, x_k].$$

Vi har då

$$\int_0^1 \Phi_n(x)dx = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)/n = \sum_{k=1}^{n} k^2/n^3 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)/n^3 \to 1/3$$

då $n \to \infty$. Här har vi använt formeln som är given i uppgiften. På samma sätt har vi

$$\int_0^1 \Psi_n(x)dx = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})/n = \sum_{k=1}^{n}(k-1)^2/n^3 = \sum_{j=1}^{n-1}(j)^2/n^3 = \frac{1}{6}(n-1)n(2(n-1)+1)/n^3 \to 1/3$$

då $n \to \infty$. Alltså har vi visat att funktionen är integrerbar och att integralens värde är lika med $1/3$.

9. a) T ex följden $\{(-1)^n/n\}$.
   b) T ex följden $1, 2, 3, 4, \ldots$
   c) T ex $f(x) = x^2$.
   d) T ex $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ för $x \neq 0$ och 0 för $x = 0$.
   e) T ex funktionen $y = x$.

10.

a) Eftersom $f'(x) \neq 0$ så antas inga extremvärden i (a, b). Antag att $f(a) > f(b)$ (om inte studera $-f$). Då är $f(a)$ max och $f(b)$ min och således gäller $f'(a) < 0$ och $f'(b) < 0$ eftersom $f'(x) \neq 0$. Tag $c \in (a, b)$. Enligt MVS gäller att om det finns $x \neq c$ så att $f(c) = f(x)$ så finns ett z mellan c och x så att $f'(z) = 0$. Eftersom $f'(x) \neq 0$ på $[a, b]$ kan detta z inte finnas. Således gäller speciellt att $f(x) \neq f(c)$ för alla $x \in (c, b]$. Eftersom $f(c) > f(b)$ (då f antar min i b) får vi då att $f(y) < f(c)$ för alla $y \in (c, b]$ enligt satsen om mellanliggande värde (annars skulle det finnas ett x som ovan). Därmed gäller att $f'(c) \leq 0$ från derivatans definition och eftersom f' aldrig är noll får vi $f'(c) < 0$. Då c är godtyckligt så är vi klara.

b) Om $f'(a) = f'(b)$ finns det inget att bevisa. Antag att $f'(a) > f'(b)$ (annars studera $-f$) och låt $c \in (f'(b), f'(a))$. Låt $g(x) = f(x) - cx$ och antag att $g'(x) \neq 0$ på $[a, b]$. Enligt a) gäller antingen $g' > 0$ eller $g' < 0$. Men $g'(a) = f'(a) - c > 0 > f'(b) - c = g'(b)$. Detta motsäger att $g'(x) \neq 0$ på $[a, b]$. Alltså finns minst en punkt z så att $g'(z) = f'(z) - c = 0$. Därmed antar f' värdet c och eftersom c var godtyckligt så är vi klara.