UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Erik Lindgren
Tel.: 070-5892942
E-post: `erik.lindgren@math.uu.se`

Tentamen i matematik
Envariabelanalys för M, 1MA210
8 juni 2022

Skrivtid: 8:00–13:00. Tillåtna hjälpmedel: skrivdon.

Antal uppgifter är 10. Det maximala antalet poäng för varje uppgift är 5 p. Alla svar ska motiveras med lämpliga beräkningar eller med en hänvisning till lämplig teori. Skriv din tentakod på varje ark. Betygsgränserna är: 0-21= Betyg U, 22-35= Betyg 3, 36-42= Betyg 4, 43-50= Betyg 5.

1. Bestäm följande gränsvärden:

   a)
   $$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - x}{x^3}$$

   b)
   $$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 + x^{\frac{3}{2}}} - \sqrt{x^2 + x}\right)$$

2. Skissa grafen till funktionen $f(x) = x^4 - x^2$. Bestäm och klassificera lokala och globala extrempunkter samt bestäm funktionens max- och minvärden om de finns. Bestäm även eventuella asymptoter.

–Var god vänd–

3. Bestäm följande integraler:

   a)
$$\int \frac{\ln x}{x^2}\, dx$$

   b)
$$\int_0^1 (x^2 + \frac{1}{3})e^{x^3+x}\, dx$$

4. Avgör om följande generaliserade integraler är konvergenta eller divergenta:

   a)
$$\int_0^1 \frac{e^{t^2}}{t}\, dt$$

   b)
$$\int_2^\infty \frac{x^4 \cos x}{(x^2-1)e^x}\, dx$$

5. Låt $g(x) = 1 + x^2 + x^6$ för $x \in [0, \infty)$. Visa att g är inverterbar och bestäm
$$\int_1^3 h(t)\, dt,$$
där h är inversen till g.

6. Använd Taylorpolynom för att bestämma ett närmevärde till integralen
$$\int_0^1 te^{-t^3}\, dt$$
med ett fel som är mindre än 0.03.

–Var god vänd–

7. Avgör om följande serier konvergerar eller divergerar:

a)

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\ln k}$$

b)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k + k^2}{2^k}$$

8. a) Låt f vara en funktion definierad på $(0, \infty)$ och A ett reellt tal. Definiera vad som menas med att

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A.$$

b) Visa med hjälp av definitionen att

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\arctan x}{x^4} = 0.$$

9. I denna uppgift krävs endast svar och ingen motivering. Ge exempel på:

a) En konvergent talföljd som ej är avtagande.

b) En begränsad funktion på $(0, 1)$ som ej är kontinuerlig på $(0, 1)$.

c) En kontinuerlig funktion på $(0, 1)$ som ej är begränsad på $(0, 1)$.

d) En kontinuerlig funktion på $(0, 1)$ som ej är likformigt kontinuerlig på $(0, 1)$.

e) En kontinuerligt deriverbar funktion på $\mathbb{R}$ som ej är två gånger deriverbar i $x = 0$.

10. Antag att f är en kontinuerlig funktion på $[0, 1]$ sådan att

$$\int_0^1 f(x)dx = 0.$$

Visa att det finns ett $c \in [0, 1]$ så att

$$f(c) = \int_0^c f(x)dx.$$

.

Lycka till!