UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Erik Lindgren

Lösning till Tentamen i matematik
Envariabelanalys för M, 1MA210
8 juni 2022

1. a) Med Taylorutveckling har vi

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^5).$$

Gränsvärdet blir då

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^5)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \left(-\frac{1}{3} + \mathcal{O}(x^2)\right) = -\frac{1}{3}.$$

b) Om vi förlänger med $\sqrt{x^2 + x^{\frac{3}{2}}} + \sqrt{x^2 + x}$ får vi uttrycket

$$\frac{x^2 + x^{\frac{3}{2}} - x^2 - x}{\sqrt{x^2 + x^{\frac{3}{2}}} + \sqrt{x^2 + x}} = \frac{x^{\frac{3}{2}} - x}{\sqrt{x^2 + x^{\frac{3}{2}}} + \sqrt{x^2 + x}} = \frac{x^{\frac{1}{2}} - 1}{\sqrt{1 + x^{-\frac{3}{2}}} + \sqrt{1 + x^{-1}}}.$$

Eftersom nämnaren är begränsad och positiv och täljaren går mot ∞ så blir gränsvärdet lika med

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{1}{2}} - 1}{\sqrt{1 + x^{-\frac{3}{2}}} + \sqrt{1 + x^{-1}}} = \infty.$$

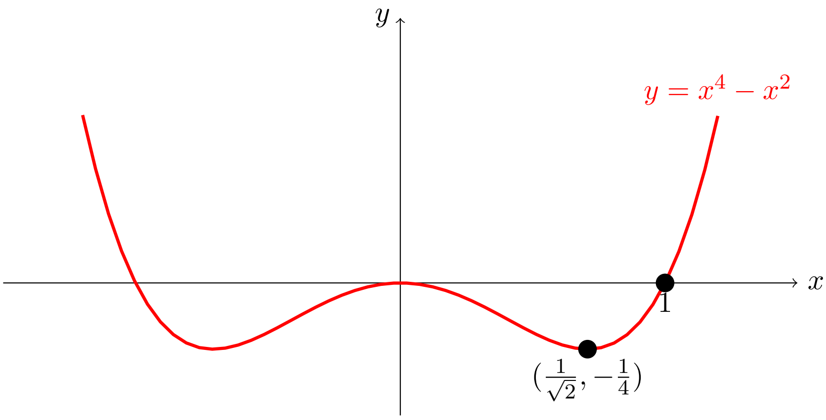
2. Med $f(x) = x^4 - x^2$ så har vi $f'(x) = 4x^3 - 2x = 2x(2x^2 - 1)$ och $f''(x) = 12x^2 - 2 = 2(6x^2 - 1)$. Kritiska punkter är då $x = 0$ och $x = \pm 1/\sqrt{2}$. Vi kan också sluta oss till att $f' > 0$ om $x > 1/\sqrt{2}$ eller $-1/\sqrt{2} < x < 0$, och att $f' < 0$ om $x < -1/\sqrt{2}$ eller $0 < x < 1/\sqrt{2}$. Vidare har vi att $f'' < 0$ om $|x| < 1/\sqrt{6}$ eller och $f'' > 0$ om $|x| > 1/\sqrt{6}$. Vi ser också att vi har gränsvärdena

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty.$$

Vi observerar att då f är kontinuerlig överallt och växer snabbare än linjärt vid $\pm\infty$ saknar funktionen horisontella, vertikala och sneda asymptoter.

Då vet vi nu att f är sträng avtagande till vänster om $x = -1/\sqrt{2}$ och på intervallet $(0, 1/\sqrt{2})$ och strängt växande till höger om $x = 1/\sqrt{2}$ och på intervallet $(-1/\sqrt{2}, 0)$. Vi kan då dra slutsatsen att f antar ett lokal min i $x = -1/\sqrt{2}$ och ett lokalt max i $x = 0$. Eftersom f är en jämn funktion antas då också ett lokalt min i $x = 1/\sqrt{2}$. Då gränsvärdet är $+\infty$ då $x \to \pm\infty$ antar f ej något max. De enda möjliga extrempunkterna är då i $x = \pm 1/\sqrt{2}$ vilket måste vara globala min. Alltså minvärdet är $f(1/\sqrt{2}) = -\frac{1}{4}$ och maxvärde finns ej. Vi vet även var f är konkav resp konvex från tecknet på f'' ovan.

Vi tar också fram att $f(0) = 0$, $f(\pm 1) = 0$, $f(\pm 1/\sqrt{2}) = -\frac{1}{4}$ och $f(\pm 1/\sqrt{6}) = -\frac{5}{36}$. Vi kan då skissa upp följande:



3. a) Vi partialintegrerar och får

$$\int x^{-2} \ln x dx = -\int -x^{-1}x^{-1} dx + (-x^{-1}\ln x) = -\frac{1 + \ln x}{x} + C.$$

b) Vi utför variabelbytet $t = x^3 + x$ och får $dt = (3x^2 + 1)dx$ vilket ger

$$\int_0^1 (x^2 + \frac{1}{3}) e^{x^3 + x}\, dx = \frac{1}{3}\int_0^2 e^t\, dt = \frac{e^2 - 1}{3}.$$

4. a) Eftersom $e^{t^2} \geq 1$ för $t \in [0,1]$ vet vi att

$$\frac{e^{t^2}}{t} \geq \frac{1}{t}$$

för $t \in (0,1]$. Vidare vet vi att integralen

$$\int_0^1 \frac{1}{t} dt$$

divergerar till ∞. Pga jämförelse för generaliserade integraler divergerar även integralen

$$\int_0^1 \frac{e^{t^2}}{t} dt.$$

b) Eftersom $x^2 - 1 \geq 3$ för $x \geq 2$ och $|\cos x| \leq 1$ så gäller

$$\left| \frac{x^2 \cos x}{(x^2-1)e^x} \right| \leq \frac{x^4}{e^x}$$

för $x \geq 2$. Om vi kan visa att integralen av

$$\frac{x^4}{e^x}$$

konvergerar så medför jämförelse för generaliserade integraler även att den efterfrågade integralen konvergerar. Vi vill nu jämföra denna med funktionen $e^{-x/2}$. Vi betraktar gränsvärdet

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4 e^{-x}}{e^{-x/2}} = \lim_{x\to\infty} x^4 e^{-x/2} = 0.$$

Vi vet också att integralen

$$\int_2^\infty e^{-x/2} dx = \frac{2}{e}$$

konvergerar. Jämförelse för generaliserade integraler medför då även att integralen

$$\int_2^\infty \frac{x^4}{e^x} dx$$

är konvergent. Enligt ovan betyder det att den efterfrågade integralen konvergerar.

5. Vi ser att $g'(x) = 2x + 6x^5 > 0$ då $x \in (0, \infty)$. Således är g strängt växande på $[0, \infty)$ och därmed inverterbar där. För att bestämma integralen använder vi substitutionen $x = h(t)$ eller $t = g(x)$ vilket ger $dt = g'(x)dx$ och därmed

$$\int_1^3 h(t)dt = \int_{h(1)}^{h(3)} xg'(x)dx = \int_0^1 (2x^2 + 6x^6)dx = \Big[2x^3/3 + 6x^7/7\Big]_0^1 = \frac{2}{3} + \frac{6}{7} = \frac{32}{21}.$$

där vi använt att $h(1) = 0$ och $h(3) = 1$ eftersom $g(0) = 1$ och $g(1) = 3$.

6. Vi använder Taylorpolynom av grad 2 för e^t och $t < 0$:

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + e^s\frac{t^3}{6}, \quad s \in (t, 0).$$

Substitutionen $t \mapsto -t^3$ för $t \in (0, 1)$ ger då

$$te^{-t^3} = t - t^4 + \frac{t^7}{2} - e^s\frac{t^{10}}{6}, \quad s \in (-t^3, 0),$$

vilket medför

$$\left|te^{-t^3} - \left(t - t^4 + \frac{t^7}{2}\right)\right| = \left|e^s\frac{t^{10}}{6}\right| \le \frac{t^{10}}{6},$$

för $t \in (0, 1)$, eftersom då gäller $e^s \le 1$. Detta ger

$$\Big|\int_0^1 te^{-t^3} - \left(t - t^4 + \frac{t^7}{2}\right) dt\Big| \le \int_0^1 \frac{t^{10}}{6}dt = \frac{1}{66} < 0.03.$$

Vidare gäller

$$\int_0^1 \left(t - t^4 + \frac{t^7}{2}\right) dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{16}.$$

Detta ger att

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{16}$$

är ett närmevärde till integralen med ett fel som är mindre än 0.03.

7. a) Vi ser att serien är alternerande pga faktorn $(-1)^k$ och eftersom $k \mapsto 1/\ln k$ är avtagande, så har termerna avtagande absolutbelopp som också går mot noll. Därmed ger Leibniz sats för alternerande serier att serien är konvergent.

b) Vi använder att $|\sin k| \leq 1$. Detta ger

$$\left|\frac{\sin k + k^2}{2^k}\right| \leq \frac{1+k^2}{2^k} = a_k.$$

Kvotkriteriet för serien som består av a_k ger

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(1+(k+1)^2)2^k}{(1+k^2)2^{k+1}} = \frac{1+(k+1)^2}{1+(k^2)}\frac{1}{2} \to \frac{1}{2}.$$

Således är serien

$$\sum_1^\infty \frac{1+k^2}{2^k}$$

absolutkonvergent och enligt jämförelsesatsen för serien så är även serien

$$\sum_1^\infty \frac{\sin k + k^2}{2^k}$$

absolutkonvergent och därmed konvergent.

8. a) Vi säger att

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A$$

om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett $R > 0$ så att $x > R$ implicerar att

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

b) Tag $\varepsilon > 0$, vi vill då visa att det finns $R > 0$ så att om $x > R$ så har vi

$$\left|\frac{\arctan x}{x^4}\right| < \varepsilon.$$

Detta eftersom $A = 0$ i definitionen i detta fall. Om vi väljer $R = (\pi/(2\varepsilon))^{\frac{1}{4}}$ vilket innebär att $R^4 = \pi/(2\varepsilon)$ ser vi att vi får

$$\left|\frac{\arctan x}{x^4}\right| \leq \left|\frac{\pi/2}{x^4}\right| < \frac{\pi/2}{R^4} = \varepsilon,$$

för alla $x > (\pi/(2\varepsilon))^{\frac{1}{4}}$, där vi använt att $|\arctan x| \leq \pi/2$. Alltså har vi visat att att det finns ett sådant R.

9. a) T ex följden $1 - k^{-1}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

b) T ex funktionen

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x \in (0, 1/2), \\ -2 & x \in [1/2, 1). \end{cases}$$

c) T ex funktionen $f(x) = 1/x$.

d) T ex funktionen $f(x) = 1/x$.

e) T ex funktionen

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ x^2 & x \geq 0. \end{cases}$$

10. Inför funktionen

$$g(x) = e^{-x} \int_0^x f(t)\, dt, \quad x \in [0, 1]$$

Då gäller att g är kontinuerligt deriverbar och att $g(0) = g(1) = 0$. Enligt medelvärdessatsen (eller enklare Rolles sats) finns det då $c \in (0, 1)$ så att $g'(c) = 0$. Detta innebär

$$-e^{-c} \int_0^c f(t)\, dt + e^{-c} f(c) = 0$$

så att

$$f(c) = \int_0^c f(t)\, dt,$$

vilket var det vi ville visa.