UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska Institutionen

Tenta
Envariabelanalys M 1MA210
2023-Januari
Jordi-Lluís Figueras

Tillåtna hjälpmedel: skrivdon. Tenta består av åtta uppgifter värda 5 poäng vardera, d.v.s. maximalt kan man få 40 poäng på tentan. Alla svar ska motiveras med lämpliga beräkningar eller med en hänvisning till lämplig teori. Skrivtid: 5 timmar.

1. Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log|x|}{\tan(x-\frac{\pi}{2})}.$$

2. Beräkna följande generaliserade integraler om de konvergerar

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}},$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\tan(x)}.$$

3. Beräkna

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^5 \frac{nx}{n+x}dx$$

och

$$\int_1^5 \left(\lim_{n\to+\infty} \frac{nx}{n+x}\right) dx.$$

4. Visa att för alla $n \in \mathbb{N}$

$$\log\left(\frac{3n+1}{3n-1}\right) = \frac{s}{n} + \frac{A_n}{n^3}$$

där $s \in \mathbb{R}$ och A_n är begränsad. Sedan bestäm a så att serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(n \log\left(\frac{3n+1}{3n-1}\right) - a\right)$$

konvergerar.

Var god vänd!

5. $P(x)$ är ett polynom och det gäller

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{x^5 - x} dx = 1.$$

Bestäm $P(x)$!

6. Skriv derivatan av funktionen

$$f(x) = x^{\log(x)}.$$

7. Låt a_n vara följden som ges av $a_1 = \frac{e}{\pi}$ och

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + a_n^3}{2023!}, \text{ för } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Avgör om följden är konvergent och bestäm i så fall dess gränsvärde.

8. Beräkna arean det område i planet som begränsas av kurvorna $y = \sqrt{x}$ och $y = x^2$.

May the Math be with you.
Formler på baksidan, var god vänd!

Trigonometriska formler

$$\sin^2(a) + \cos^2(a) = 1.$$
$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b).$$
$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b).$$

Taylors utveckling

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{f^k(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{N+1}(\xi)}{(N+1)!}(x-a)^{N+1},\ \xi \in [x,a].$$

Konstanter

$$\pi \in [3.141592, 3.141593]$$
$$e \in [2.718281, 2.718282]$$

11272-0009-GDD

1. För täljaren får vi att:

$\lim_{x\to 0} \log|x| \to -\infty$

$\boxed{5/5}$

och för nämnaren får vi:

$\lim_{x\to 0} \tan(x-\frac{\pi}{2}) \to \pm\infty$ då $\tan(x-\frac{\pi}{2})$ är odefinierad i $x=0$

om det går mot $+\infty$ eller $-\infty$ beror på om vi tar vänster eller högergränsvärdet.

Då både täljaren och nämnaren för sig divergerar mot $\pm\infty$ så kan vi använda oss av l'hopitals regel som här ger oss att:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

derivering av $\log|x|$:

$f(x) = \log|x| \quad f'(x) = \frac{1}{x}$

derivering av $\tan(x-\frac{\pi}{2})$:

då $\cos(t-\frac{\pi}{2}) = \sin t$

$$g(x) = \tan(x-\frac{\pi}{2}) \quad g'(x) = \frac{1}{\cos^2(x-\frac{\pi}{2})} \cdot \frac{d(x-\frac{\pi}{2})}{dx} = \frac{1}{\cos^2(x-\frac{\pi}{2})} = \frac{1}{\sin^2(x)}$$

vi får: $\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} \cdot \frac{\sin^2 x}{1}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2 x}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x} \cdot \sin x\right) =$

$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right) \cdot \lim_{x\to 0}(\sin x) = 1 \cdot 0 = 0$ BRA

Gränsvärdet går mot noll.

2/9 11272-0019-PRW

(2.) a) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{R\to 1^-} \int_0^R \frac{dx}{\sqrt{1-x}} \left[\begin{array}{l} u=\sqrt{1-x} \\ du=-\frac{dx}{2\sqrt{1-x}} \end{array} \right.$

5/5

$= \lim_{R\to 1^-} -2\int_1^{\sqrt{1-R}} du = \lim_{R\to 1^-} \left(-2\left[u\right]_1^{\sqrt{1-R}}\right)$

$= \lim_{R\to 1^-}\left(-2\left[\sqrt{1-x}\right]_0^R\right)$ Ok

$= \lim_{R\to 1^-} -2(\sqrt{1-R}-\sqrt{1-0})$

$= 2$

b) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\tan x} = \lim_{R\to\frac{\pi}{2}^-} \int_{\frac{\pi}{4}}^{R} \frac{\cos x}{\sin x}\,dx \left[\begin{array}{l} u=\sin x \\ du=\cos x \end{array} \right.$

$= \lim_{R\to\frac{\pi}{2}^-} \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sin R} \frac{du}{u} = \lim_{R\to\frac{\pi}{2}^-} \left[\ln|u|\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sin R}$

$= \lim_{R\to\frac{\pi}{2}^-} \left[\ln|\sin x|\right]_{\frac{\pi}{4}}^{R}$

$= \lim_{R\to\frac{\pi}{2}^-} \ln|\sin R| - \ln|\sin\frac{\pi}{4}|$

$= \ln|\sin 1| - \ln\frac{\sqrt{2}}{2}$

$= \ln\sqrt{2}$ Ok

3/9 11272-0019-PRW

BRA JOBBAT

$\boxed{5/5}$

3. a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_1^5 \frac{nx}{n+x}\,dx$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} n\int_1^5 \left(1-\frac{n}{n+x}\right)dx$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \left(n\int_1^5 dx - n^2\int_1^5 \frac{dx}{n+x}\right)$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \left(n\left[x\right]_1^5 - n^2\left[\ln|n+x|\right]_1^5\right)$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \left(4n - n^2 \ln\left|\frac{n+5}{n+1}\right|\right)$

Försiktig med att splitta gränsvärden

otillåtet!!!

$= \lim\limits_{n\to+\infty}(4n) - \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{4n^2}{n+1}\ln\left|\left(1+\frac{4}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{4}}\right|\right)$

$= \lim\limits_{n\to+\infty}(4n) - \left(\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4n^2}{n+1}\right)\left(\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\ln\left|\left(1+\frac{4}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{4}}\right|\right)\right)$

$= \lim\limits_{n\to+\infty}(4n) - \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{4n^2}{n+1}\right)\cdot \ln|e|$

$= \lim\limits_{n\to+\infty}\left(4n - \frac{4n^2}{n+1}\right)$

$= 4\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+n-n^2}{n+1}\right)$

$= 4\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right) = 4$

medal of honor!!!

b) $\int_1^5 \left(\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{nx}{n+x}\right)\right)dx$

$= \int_1^5 \left(\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{x}{1+\frac{x}{n}}\right)\right)dx$

$= \int_1^5 \left(\frac{x}{1+0}\right)dx$

$= \int_1^5 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^5 = \frac{25}{2} - \frac{1}{2} = 12$

9.) Från Taylors formel får vi att

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k + \frac{f^{(N+1)}(a)}{(N+1)!}(x-1)^{N+1}, \; a \in [1, x]$$

Om $f(x) = \ln x$ får vi att

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$f'''(x) = \frac{2}{x^3}$$

så

$$\ln x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3a^3}(x-1)^3, \; a \in [1, x]$$

$$\rightarrow \ln \frac{3n+1}{3n-1} = \ln\left(1 + \frac{2}{3n-1}\right)$$

$$= \frac{2}{3n-1} - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3n-1}\right)^2 + \frac{1}{3a^3}\left(\frac{2}{3n-1}\right)^3$$

$$= \frac{s}{n} - \frac{s}{n} + \frac{2}{3n-1} - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3n-1}\right)^2 + \frac{1}{3a^3}\left(\frac{2}{3n-1}\right)^3, \; s \in \mathbb{R}$$

$$= \frac{s}{n} + \frac{n^3}{n^3}\left(-\frac{s}{n} + \frac{2}{3n-1} - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3n-1}\right)^2 + \frac{1}{3a^3}\left(\frac{2}{3n-1}\right)^3\right)$$

$$= \frac{s}{n} + \frac{1}{n^3}\left(-sn^2 + \frac{2n^2}{3-\frac{1}{n}} - \frac{n}{2}\left(\frac{2}{3-\frac{1}{n}}\right)^2 + \frac{1}{3a^3}\left(\frac{2}{3-\frac{1}{n}}\right)^3\right)$$

4. För att uttrycket i parantesen ska vara begränsat krävs att det inte divergerar när $n \to \infty$. D.v.s. att

$$\lim_{n\to\infty}\left(-sn^2+\frac{2n^2}{3-\frac{1}{n}}-\frac{n}{2}\left(\frac{2}{3-\frac{1}{n}}\right)^2+\frac{1}{3n^3}\left(\frac{2}{3-\frac{1}{n}}\right)^3\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-sn^2\left(3-\frac{1}{n}\right)^2+2n^2\left(3-\frac{1}{n}\right)-\frac{n}{2}\cdot 2^2}{\left(3-\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{3n^3}\left(\frac{2}{3-\frac{1}{n}}\right)^3\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n(6n-4)\left(-\frac{3}{2}s+1\right)}{\left(3-\frac{1}{n}\right)^2}-\frac{s}{\left(3-\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{3n^3}\left(\frac{2}{3-\frac{1}{n}}\right)^3\right)$$

inte divergerar. Vi kan se att detta endast sker när $-\frac{3}{2}s+1=0 \Leftrightarrow s=\frac{2}{3}$.

Om vi sätter

$$s=\frac{2}{3}$$

och

$$A_n=-\frac{2}{3}n^2+\frac{2n^2}{3-\frac{1}{n}}-\frac{n}{2}\left(\frac{2}{3-\frac{1}{n}}\right)^2+\frac{1}{3n^3}\left(\frac{2}{3-\frac{1}{n}}\right)^3$$

så uppfyller de alltså de givna villkoren.

(4.) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\ln\left(\frac{3n+1}{3n-1}\right)-a\right)$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}+\frac{A_n}{n^2}-a\right)$ (Där vi använder resultatet vi visade ovan.)

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}-a\right)$

$<\max(A_n)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}-a\right)$ (Då A_n är begränsad)

Den första termen konvergerar, så för att summan ska konvergera måste den andra ska göra det villkor endast sker när $a=\frac{2}{3}$.

5. Låt oss anta att $P(-1) \neq 0$

Då är $P(-1) = K \neq 0$ i en omgivning runt $x=-1$ då $P(x)$ är kontinuerlig

Då kvoten är odefinierad i $x=-1$ så kan vi per definition skriva om integralen till 2:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{x^5-x}dx = \int_{-\infty}^{-1} \frac{P(x)}{x^5-x}dx + \int_{-1}^{\infty} \frac{P(x)}{x^5-x}dx = \int_{-\infty}^{-2} \frac{P(x)}{x^5-x}dx + \int_{-2}^{-1} \frac{P(x)}{x^5-x}dx + \int_{-1}^{\infty} \frac{P(x)}{x^5-x}dx$$

där a är ett tal

studerar vi nu den mellersta integralen vet vi att alla övriga tal $P(x)$ i intervallet $a \in [-2,-1)$ är kontinuerliga och därför begränsade

säg att $K \leq P(a) \leq L$ för $a \in [-2,-1)$

då $a^5 - a \geq 0$ på intervallet får vi:

$$\frac{K}{x^5-x} \leq \frac{P(x)}{x^5-x} \leq \frac{L}{x^5-x}$$ på intervallet,

$$\Leftrightarrow \frac{K}{(x+1)(x^4-x^3+x^2-x)} \leq \frac{P(x)}{x^5-x} \leq \frac{L}{(x^4-x^3+x^2-x)(x+1)}$$

(och nollskilt i intervallet)

$x^4-x^3+x^2-x$ är begränsat så vi kan säga att

$$\frac{K_1}{x+1} \leq \frac{P(x)}{x^5-x} \leq \frac{L_1}{x+1}$$

$$K_1 \int_{-2}^{-1} \frac{K_1}{x+1}dx = \int_{-1}^{0} \frac{K_1}{t}dt$$ som divergerar, även $\int_{-2}^{-1} \frac{L_1}{x+1}dx$ divergerar analogt

Substitution

så därför måste $\frac{P(x)}{x^5-x}$ divergera, detta går inte om $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{x^5-x}dx = 1$,

därför har vi en motsägelse som säger att $P(-1) = 0$

Analogt får vi att $P(0) = 0$ och $P(1) = 0$

$P(-1) = 0 \Rightarrow (x+1) \mid P(x)$, $P(0) = 0 \Rightarrow x \mid P(x)$, $P(1) = 0 \Rightarrow (x-1) \mid P(x)$

dvs. $P(x) = (x-1)x(x+1)q(x) = (x^3-x)q(x)$

där $q(x)$ är ett polynom

6. Vi logaritmerar båda led:

$\ln(f(x)) = \ln\left(x^{\ln(x)}\right) \overset{\text{logaritmlag}}{=} \ln(x)\ln(x) = (\ln(x))^2$

därefter deriverar vi båda led m.h.a. kedjeregeln

$f'(x) \cdot \frac{1}{f(x)} = \frac{2\ln(x)}{x} \iff f'(x) = \frac{2\ln(x) f(x)}{x} = \underline{\underline{\frac{2\ln(x)\, x^{\ln(x)}}{x}}}$

(derivatan har definitionsmängden $D_f = (0, \infty)$, liksom funktionen.)

5/5

11272-0009-GDD

7. Om $a_n > 0$ så är $a_n^2 + a_n^3 > 0 \Rightarrow \frac{a_n^2+a_n^3}{2023!} > 0 \Rightarrow a_{n+1} > 0$

$a_1 = \frac{e}{\pi} > 0$, därav är talföljden nedåt begränsad så $a_n > 0 \; \forall n$

5

antag att $0 < a_n < 1$, då gäller det att:

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + a_n^3}{2023!} = a_n \frac{a_n + a_n^2}{2023!} < a_n \frac{1+1}{2023!} = \frac{2}{2023!} a_n$$

Varför?

$a_{n+1} < \frac{2}{2023!} a_n \Rightarrow 1 > a_n > a_{n+1}$ OK

då $a_1 = \frac{e}{\pi} < 1$ så är $a_n < 1 \; \forall n = 1, 2, 3 \ldots$

Därav vet vi att $a_n > a_{n+1} \quad \forall n = 1, 2, 3 \ldots$, talföljden är avtagande

Talföljden är konvergent då den är avtagande och nedåt begränsad (av exempelvis 0)

$a_1 < 1$ och $a_{n+1} < \frac{2}{2023!} a_n$

sätt $b_n = \left(\frac{2}{2023!}\right)^{n-1}$ då är $b_1 = 1$ och $b_{n+1} = \frac{2}{2023!} b_n$.

Av detta vet vi att $b_n \geq a_n \; \forall n$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{2023!} \cdot \left(\frac{2}{2023!}\right)^n\right) = 0 \text{ då } \frac{2}{2023!} < 1$$

sätt $c_n = 0$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$

vi vet att $c_n < a_n$ då $a_n > 0$

både b_n och c_n konvergerar mot noll

och $c_n < a_n < b_n$.

Instängningssatsen säger att även a_n konvergerar mot 0

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

UU 2020

8. Säg att $f(x)=\sqrt{x}$ och $g(x)=x^2$ för att skilja dem åt.

Låt oss beräkna när de skär varann:

$g(x)=f(x) \Leftrightarrow \sqrt{x}=x^2 \Leftrightarrow x=x^4 ;\ x\geq 0 \Leftrightarrow x=0$ eller $1=x^3 \Leftrightarrow$

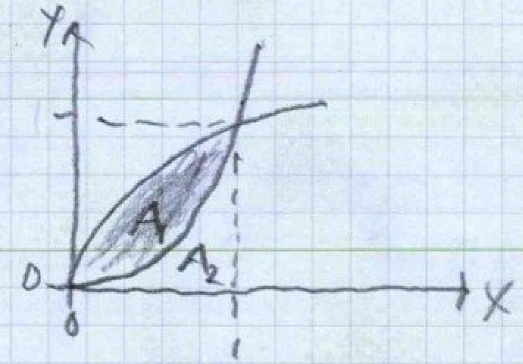
$x=0$ eller $x=1$

$f(0,5)=\sqrt{0,5}>0,25=g(0,5)$, detta ger att $f(x)>g(x)$

mellan deras skärningspunkter $f(x)$ och $g(x)\geq 0$ för positiva x,

låt oss skissa dessa i planet:

5/5



Arean mellan dem är $A_1 = A_1 + A_2 - A_2 = \int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 g(x)\,dx$

Låt oss beräkna detta värde:

en primitiv funktion till $f(x)=x^{1/2}$ är $F(x)=\frac{2}{3}x^{3/2}$

en primitiv funktion till $g(x)=x^2$ är $F(x)=\frac{x^3}{3}$

Vilket ger att:

$$\int_0^1 f(x)\,dx-\int_0^1 g(x)\,dx=\left[\frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\left(\frac{2}{3}\cdot 1^{3/2}-\frac{1^3}{3}\right)-\left(\frac{2}{3}\cdot 0^{3/2}-\frac{0^3}{3}\right)=$$

$$=\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)-(0-0)=\frac{1}{3}$$

Arean av området som begränsas av dessa två kurvor är $\frac{1}{3}$ a.e.