UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Anders Källström

Prov i matematik
Q
Flervariabelanalys
2008-03-10

Skrivtid: 8-13. Inga hjälpmedel. Lösningarna skall åtföljas av förklarande text/figurer. Tentand som är godkänd på duggan under kursen ska ej räkna problem 1. Varje problem ger högst 5 poäng. För betyget 3 krävs minst 18p, för 4 eller 5 minst 25, resp 32p.

1. Visa att ytorna $z = 16 - x^2 - y^2$ och $63z = x^2 + y^2$ skär varandra under rät vinkel.

2. Undersök om funktionen $f(x, y) = e^{xy} + \cos(x + y)$ har ett lokalt extremvärde i origo och ange i så fall dess karaktär.

3. Låt f vara en två gånger kontinuerligt deriverbar funktion på $\mathbb{R}$. Antag att funktionen $z = f(x^2 + y)$ uppfyller

$$z_{xx} - 2xz_{xy} + (x^2 + y)z = 0.$$

Bestäm funktionen f.

4. Beräkna dubbelintegralerna

a) $\displaystyle\iint_D \frac{|x|}{1 + x^2 + y^2}\,dxdy$ där $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 1,\ y \le x\}$.

b) $\displaystyle\iint_D (x + 2y)\,dxdy$ där D är kvadraten med hörn i (3,0), (6,3), (3,6) och (0,3).

5. En rymdkurva ges av parameterekvationerna

$$x = t, \quad y = t, \quad z = \frac{2}{3}t^{3/2}.$$

Bestäm ekvationen för det plan som går genom punkten $(1, 1, \frac{2}{3})$ på kurvan och som spänns upp av tangenten och huvudnormalen till kurvan i denna punkt (det s.k. *oskulerande planet*).

6. Beräkna volymen av det område i $z \ge 0$ som begränsas av de båda ytorna $z^2 = x^2 + y^2$ och $z = 2 - x^2 - y^2$. Ange även ”tyngdpunktens” koordinater för detta område.

7. Bestäm det största resp. minsta värdet som funktionen $f(x, y, z) = xz + 2yz$ kan anta om $x^2 + y^2 + z^2 = 70$ och $x + 2y + 3z = 0$.

8. Låt $f(x, y, z) = xy + yz + 2x^2z^2$ och $g(x, y, z) = x^3 + yz^2$.

a) Bestäm tangentplanet i $(1, -1, 1)$ till ytan $f(x, y, z) = 0$.

b) Visa att i en omgivning till $(1, -1, 1)$ definieras, genom ekvationerna $f(x, y, z) = 0$ och $g(x, y, z) = 0$, y och z som entydiga, kontinuerligt deriverbara funktioner av x. Bestäm även tangenten till skärningen mellan ytorna $f = 0$ och $g = 0$ i $(1, -1, 1)$.

Lösningar till tentamen i Flervariabelanalys 2008-03-10

Lösning till problem 1. Skärningskurvan mellan ytorna bestäms

$$\begin{cases} z = 16-(x^2+y^2) \\ 63z = x^2+y^2 \end{cases} \Rightarrow 63z = 16-z \Rightarrow z = \frac{1}{4},\ x^2+y^2 = \frac{63}{4}.$$

Vinkeln mellan ytorna bestäms genom vinkeln mellan ytornas normaler (fås med hjälp av gradientvektorn)

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_1 &= \nabla(x^2+y^2+z) = (2x,2y,1) \\ \mathbf{N}_2 &= \nabla(x^2+y^2-63z) = (2x,2y,-63) \end{aligned}$$

vilket ger $\mathbf{N}_1 \bullet \mathbf{N}_2 = 4x^2+4y^2-63 = 0$ på hela skärningskurvan. Ytorna skär således varandra under rät vinkel.

Lösning till problem 2. Derivering av funktionen ger

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= ye^{xy} - \sin(x+y) \Rightarrow f_x(0,0) = 0 \quad \text{och} \\ f_y(x,y) &= xe^{xy} - \sin(x+y) \Rightarrow f_y(0,0) = 0. \end{aligned}$$

Punkten $(0,0)$ är således en kritisk punkt. Vi får andra derivatorna

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= y^2e^{xy} - \cos(x+y) &&\Rightarrow f_{xx}(0,0) = -1, \\ f_{xy}(x,y) &= e^{xy} + xye^{xy} - \cos(x+y) &&\Rightarrow f_{xy}(0,0) = 0 \quad \text{och} \\ f_{yy}(x,y) &= x^2e^{xy} - \cos(x+y) &&\Rightarrow f_{yy}(0,0) = -1. \end{aligned}$$

Den kvadratiska formen i $(0,0)$ blir nu

$$Q(h,k) = f_{xx}(0,0)h^2 + 2f_{xy}(0,0)hk + f_{yy}(0,0)k^2 = -h^2-k^2$$

vilken är negativt definit, dvs $(0,0)$ är ett lokalt maximum.

En alternativ lösning fås genom att använda MacLaurinutvecklingar av e^t och $\cos t$ på följande sätt:

$$\begin{aligned} f(x,y) = e^{xy} + \cos(x+y) &= 1 + xy + \frac{x^2y^2}{2!} + \ldots + 1 - \frac{(x+y)^2}{2!} + \ldots \\ &= 2 + xy - \frac{(x+y)^2}{2} + \ldots = 2 - \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right) + \ldots \end{aligned}$$

där $\ldots$ innehåller termer av grad högre än 2. Vi ser att derivatorna i origo är 0 (inga x- eller y-termer) och den kvadratiska formen i $(0,0)$ är $-(x^2+y^2)/2$ vilket är negativt definit.

Lösning till problem 3. Kedjeregeln på funktionen $z = f(x^2+y)$ ger

$$z_x = f'(x^2+y)\cdot 2x, \qquad z_{xx} = f''(x^2+y)\cdot 4x^2 + f'(x^2+y)\cdot 2, \qquad z_{xy} = f''(x^2+y)\cdot 1\cdot 2x.$$

Detta ger insatt i den givna differentialekvationen

$$\begin{aligned} 4x^2f''(x^2+y) + 2f'(x^2+y) - 2x\cdot 2xf''(x^2+y) + (x^2+y)f(x^2+y) = 0 \Rightarrow \\ 2f'(x^2+y) + (x^2+y)f(x^2+y) = 0 \end{aligned}$$

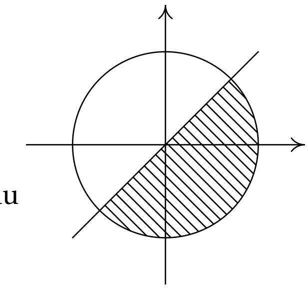
Om vi sätter $t = x^2 + y$ så får vi differentialekvationen $2f'(t) + tf(t) = 0$. Detta är en linjär differentialekvation och lösningen fås (t.ex. med integrerande faktor) som

$$\frac{d}{dt}\Big(e^{t^2/4} f(t)\Big) = e^{t^2/4}\Big(tf(t)/2 + f'(t)\Big) = 0$$

vilket ger $e^{t^2/4} f(t) = C$ eller $f(t) = Ce^{-t^2/4}$ där C är en reell konstant.

Lösning till problem 4. Vi byter till polära koordinater

a) Integrationsområdet ses i vidstående figur. Vi får integralen

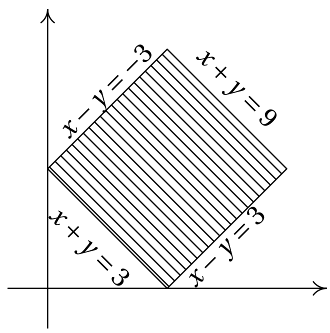


$$I = \iint_{D^*} \frac{r|\cos\theta|}{1+r^2}\, r\,dr\,d\theta$$

där $D^* = \{(r,\theta)\colon 0 \le r \le 1, -3\pi/4 \le \theta \le \pi/4\}$. Itererad integration ger nu

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \frac{r^2}{1+r^2}\,dr \int_{-3\pi/4}^{\pi/4} |\cos\theta|\,d\theta \\
&= \int_0^1 \Big(1 - \frac{1}{1+r^2}\Big)dr\Big(\int_{-3\pi/4}^{-\pi/2} (-\cos\theta)\,d\theta + \int_{-\pi/2}^{\pi/4} \cos\theta\,d\theta\Big) \\
&= \Big[r - \arctan r\Big]_0^1\Big(\Big[-\sin\theta\Big]_{-3\pi/4}^{-\pi/2} + \Big[\sin\theta\Big]_{-\pi/2}^{\pi/4}\Big) = \Big(1-\frac{\pi}{4}\Big)\Big(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + 1\Big) = 2\Big(1-\frac{\pi}{4}\Big).
\end{aligned}$$

b) Integrationsområdet ses i figuren. Sidolinjernas ekvationer bestäms med hjälp av hörnpunkterna och syns också i figuren. Vi gör variabelbytet



$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases} \qquad \text{vilket ger} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}(u+v) \\ y = \dfrac{1}{2}(u-v). \end{cases}$$

Detta ger ett område $D^* = \{(u,v)\colon 3 \le u \le 9, -3 \le v \le 3\}$. Vidare blir

$$x + 2y = \frac{1}{2}(u+v) + (u-v) = \frac{3u-v}{2} \quad \text{och} \quad dx\,dy = \left|\begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix}\right| du\,dv = \frac{1}{2}du\,dv$$

Detta ger integralen

$$\begin{aligned}
\iint_{D^*} \frac{3u-v}{2}\cdot\frac{1}{2}\,du\,dv &= \frac{1}{4}\iint_{D^*} 3u\,du\,dv \quad (v \text{ udda, } D^* \text{ symmetriskt i } v\text{-led}) \\
&= \frac{1}{4}\Big[\frac{3u^2}{2}\Big]_3^9 \cdot \Big[v\Big]_{-3}^3 = \frac{3}{8}(81-9)(3+3) = 162.
\end{aligned}$$

Lösning till problem 5. Vi har $\mathbf{r}(t) = (t, t, 2t^{3/2}/3)$. Vi ser att $\mathbf{r}(1) = (1,1,2/3)$. En tangentvektor i denna punkt kan fås med $\mathbf{r}'(1) = (1,1,t^{1/2})|_{t=1} = (1,1,1)$. Vidare ligger $\mathbf{r}''(1) = (0,0,t^{-1/2}/2)|_{t=1} =$

$(0,0,1/2)$ i det plan som genereras av tangent och huvudnormal i punkten $\mathbf{r}(1) = (1,1,2/3)$. Det sökta planets normal är således parallell med binormalen i punkten dvs, med

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(1,-1,0)$$

Det sökta planets ekvation fås nu som

$$(1,-1,0) \bullet (x-1, y-1, z-2/3) = (x-1)-(y-1) = 0 \Rightarrow x-y = 0.$$

Lösning till problem 6. Skärningskurvan mellan paraboloiden $z = 2-x^2-y^2$ och konen $z^2 = x^2+y^2$ uppfyller $z = 2-z^2$ vilket ger $z = 1$ (roten $z = -2$ ligger inte i $z \geq 0$). Detta ger att $x^2+y^2 = 1$ på skärningen. Vi kan nu skriva den sökta volymen som

$$\begin{aligned} V &= \iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} \left(2-x^2-y^2-\sqrt{x^2+y^2}\right) dx\,dy \quad \text{(polära koord.)} \\ &= \iint\limits_D (2-r^2-r)\, r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (2r-r^3-r^2)\,dr = 2\pi\left[r^2-\frac{r^4}{4}-\frac{r^3}{3}\right]_0^1 \\ &= 2\pi\left(1-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right) = \frac{2\pi}{12}(12-3-4) = \frac{5\pi}{6}. \end{aligned}$$

Av symmetriskäl ligger tyngdpunkten i $(0,0,z_T)$ där (K är det givna området)

$$z_T = \frac{1}{V}\int\limits_K z\,dV$$

Om vi sätter $z_1 = \sqrt{x^2+y^2}$ och $z_2 = 2-x^2-y^2$ (för $x^2+y^2 \leq 1$) så blir

$$\begin{aligned} \int\limits_K z\,dV &= \iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} dx\,dy \int_{z_1}^{z_2} z\,dz = \iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} \left[\frac{z^2}{2}\right]_{z_1}^{z_2} dx\,dy \\ &= \frac{1}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} \left((2-x^2-y^2)^2-(x^2+y^2)\right) dx\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 r\,dr \int_0^{2\pi} \left((2-r^2)^2-r^2\right) d\theta \\ &= \frac{2\pi}{2}\int_0^1 \left((2-r^2)^2-r^2\right) r\,dr \begin{bmatrix} t = r^2 \\ dt = 2r\,dr \end{bmatrix} = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \left((2-t)^2-t\right) dt = \frac{\pi}{2}\left[-\frac{(2-t)^3}{3}-\frac{t^2}{2}\right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{8}{3}\right) = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{-2-3+16}{6} = \frac{11\pi}{12} \end{aligned}$$

Således blir $z_T = \dfrac{6}{5\pi}\cdot\dfrac{11\pi}{12} = \dfrac{11}{10}$.

Lösning till problem 7. Sätt $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ och $h(x,y,z) = x+2y+3z$. Villkoren $g = 70$ och $h = 0$ betyder geometriskt en sfär och en cirkel. Skärningen mellan sfären och planet är en cirkel, dvs en sluten begränsad mängd. Funktionen f är kontinuerlig och således antar f både ett största och ett minsta värde på cirkeln. För att bestämma de punkter där detta inträffar har vi villkoret ∇f, ∇g, ∇h är linjärt beroende, dvs

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \scriptstyle -2 & \scriptstyle + & \end{array} \\ \begin{vmatrix} z & 2z & x+2y \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{vmatrix} z & 0 & x+2y \\ 2x & 2y-4x & 2z \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2(y-2x)(3z-x-2y) = 0$$

Tillsammans med bivillkoren har vi ekvationssystemet

$$\begin{cases} (y-2x)(3z-x-2y) &= 0 \\ x^2+y^2+z^2 &= 70 \\ x+2y+3z &= 0 \end{cases}$$

Fall 1: $y = 2x$ ger

$$\begin{cases} 5x^2+z^2 &= 70 \\ 5x+3z &= 0 \end{cases} \Rightarrow 5x^2 + \frac{25x^2}{9} = 70 \Rightarrow \frac{70x^2}{9} = 70 \Rightarrow x = \pm 3$$

Detta ger punkterna $(3,6,-5)$ och $(-3,-6,5)$ och $f = -75$.

Fall 2: $x+2y = 3z$ ger i den tredje ekvationen $6z = 0$ dvs $z = 0$. Nu ger $x = -2y$ i den andra ekvationen $5y^2 = 70 \Rightarrow y = \pm\sqrt{14}$ och $x = \mp 2\sqrt{14}$. Här blir $f = 0$ (eftersom $z = 0$). Vi ser att största värdet är 0 och minsta värdet är -75.

Lösning till problem 8. a) Först konstaterar vi att $f(1,-1,1) = 0$. Vi finner nu att $\nabla f(1,-1,1) = (y+4xz^2, x+z, y+4x^2z)_{(1,-1,1)} = (3,2,3)$ vilket ger tangentplanets ekvation

$$(3,2,3) \bullet (x-1, y+1, z-1) = 0 \Rightarrow 3x+2y+3z = 4.$$

b) Det gäller att $f(1,-1,1) = 0$ och $g(1,-1,1) = 0$. Både f och g är också kontinuerligt deriverbara. För att samtidigt kunna lösa ut $y = y(x)$ och $z = z(x)$ som funktioner av x i omgivning av $x = 1$ så att $y(1) = -1$ och $z(1) = 1$ räcker det enligt implicita funktionssatsen att funktionaldeterminanten $\dfrac{d(f,g)}{d(y,z)} \neq 0$ i punkten $(1,-1,1)$.

$$\frac{d(f,g)}{d(y,z)}(1,-1,1) = \begin{vmatrix} f_y & f_z \\ g_y & g_z \end{vmatrix}_{(1,-1,1)} = \begin{vmatrix} x+z & y+4x^2z \\ z^2 & 2yz \end{vmatrix}_{(1,-1,1)} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$$

Tangentriktningen på skärningskurvan kan nu fås som kryssprodukten av ytnormalerna till de båda ytorna, dvs

$$\mathbf{T} = \nabla f(1,-1,1) \times \nabla g(1,-1,1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-7, 15, -3)$$

Ekvationen för tangenten blir $(x,y,z) = (1,-1,1) + t(-7,15,-3)$.