UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Anders Källström

Prov i matematik
Q
Flervariabelanalys
2009–03–09

Skrivtid: 8–13. Inga hjälpmedel. Lösningarna skall åtföljas av förklarande text/figurer. Varje problem ger högst 5 poäng. För betyget 3 krävs minst 18p, för 4 minst 25p och för 5 minst 32p. Den som är godkänd på duggan 090217 ska ej räkna problem 1.

1. Bestäm de punkter på ytan $x^3 - xy^2 - 3x - z^3 = 1$ där dess tangentplan är vinkelrätt mot z-axeln.

2. Bestäm alla lösningar av formen $f(x,y) = g(x^2 - y)$ (där g är en funktion av en reell variabel) till differentialekvationen

$$2f_y + f_{xx} + xf_{xy} = 0.$$

3. Bestäm de stationära punkterna till funktionen $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 3y$ och ange deras karaktär.

4. Beräkna integralen $\iint_D x^3 y\, dxdy$ om D är området i den positiva kvadranten som begränsas av x-axeln, y-axeln och parabeln $x + y^2 = 3$.

5. Bestäm största och minsta värdet av funktionen $x + y + z$ om $x^2 + y^2 = 2$ och $x + z = 1$.

6. Låt D vara området i konen $\{(x,y,z) \colon \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1\}$. Beräkna integralen $\iiint_D \left(1 + \sqrt{x^2+y^2}\right) dxdydz$.

7. Beräkna kurvintegralen $\int_C 2xe^y\, dx + (x^2e^y + xy^2)\, dy$ om C är halvcirkelbågen i övre halvplanet från $(1,0)$ till $(-1,0)$.

8. Om $a < 1$ så har ekvationen $x^3 - 3ax + 2 = 0$ endast en reell lösning. Denna kan betraktas som en funktion av a och betecknas $x(a)$. Motivera varför denna funktion är deriverbar och bestäm $x'(0)$.

Lösningar till problemen

Lösning till problem 1: För att tangentplanet ska vara vinkelrätt mot z-axeln måste ytans normal (given som gradientvektorn) vara parallell med $(0,0,1)$, dvs

$$\nabla(x^3 - xy^2 - 3x - z^3) = (3x^2 - y^2 - 3, -2xy, -3z^2) = \lambda(0,0,1).$$

Detta ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} 3x^2 - y^2 - 3 &= 0 \\ 2xy &= 0 \\ -3z^2 &= \lambda \end{cases}$$

Den andra av ekvationerna ger två fall
Fall 1: $x = 0$, vilket insatt i den första ekvationen ger $y^2 + 3 = 0$ och den har inga reella lösningar.

Fall 2: $y = 0$. Här ger den första ekvationen $x^2 - 1 = 0$ dvs $x = \pm 1$. Insättning av $(x,y) = (1,0)$ i ytans ekvation ger $z = -\sqrt[3]{3}$, och $(x,y) = (-1,0)$ ger $z = 1$. Det finns således två punkter på ytan där tangentplanet är vinkelrätt mot z-axeln, nämligen $(1,0,-\sqrt[3]{3})$ och $(-1,0,1)$.

Lösning till problem 2: Kedjeregeln ger

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= g'(x^2-y)\cdot 2x & f_{xx}(x,y) &= g''(x^2-y)\cdot(2x)^2 + g'(x^2-y)\cdot 2 \\ f_y(x,y) &= g'(x^2-y)\cdot(-1) & f_{xy}(x,y) &= g''(x^2-y)\cdot(-1)\cdot(2x) \end{aligned}$$

Insättning i den givna differentialekvationen ger nu

$$-2g' + 4x^2g'' + 2g' - 2x^2g'' = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x^2g''(x^2-y) = 0 \quad \text{för alla } x, y.$$

Således måste $g''(t) = 0$ vilket kan integreras till $g(t) = A + Bt$ där A och B är konstanter. Detta ger att $f(x,y) = A + B(x^2 - y)$.

Lösning till problem 3: De stationära punkterna fås ur ekvationssystemet

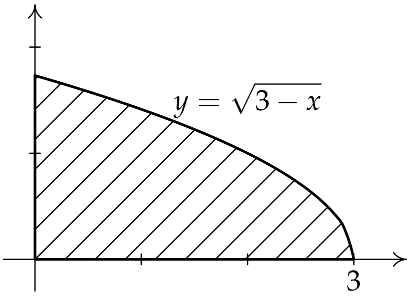
$$\begin{cases} f_x = 2x - y = 0 \\ f_y = -x + 2y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$$

Den enda stationära punkten är alltså $(-1,-2)$. Andraderivatorna till f är $f_{xx} = 2$, $f_{xy} = -1$, $f_{yy} = 2$ och den kvadratiska formen i $(-1,-2)$ blir

$$Q = 2h^2 - 2hk + 2k^2 = 2\Big(\big(h - \frac{k}{2}\big)^2 + \frac{3}{4}k^2\Big)$$

vilken är positivt definit. Den stationära punkten är ett lokalt minimum.

Lösning till problem 4: Integrationsområdet syns i figuren. Vi beräknar integralen med itererad integration enligt



$$\begin{aligned}\iint_D x^3y\,dxdy &= \int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{3-x}} x^3y\,dy \\ &= \int_0^3 \left[\frac{x^3y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{3-x}} dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^3 x^3(3-x)\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{3x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right]_0^3 = \frac{3^5}{2}\Big(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\Big) = \frac{3^5}{2\cdot 4\cdot 5} = \frac{243}{40}.\end{aligned}$$

Lösning till problem 5: Vi sätter $f(x,y,z) = x+y+z$, $g(x,y,z) = x^2+y^2-2$ och $h(x,y,z) = x+z-1$. Problemet gäller att bestämma största och minsta värde av f under bivillkoren $g=0$ och $h=0$. Villkoret som bestämmer de punkter där detta inträffar är att ∇f, ∇g, ∇h är linjärt beroende, dvs determinanten

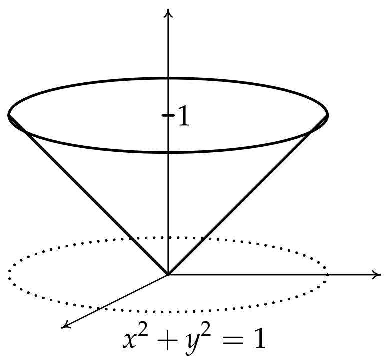
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} + \\ \\ -1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2x & 2y & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2x = 0$$

$x=0$ ger tillsammans med bivillkoren att $z=1$ och $y=\pm\sqrt{2}$. Vi får två punkter $(0,\sqrt{2},1)$ och $(0,-\sqrt{2},1)$. Dessa ger

$$f(0,\sqrt{2},1) = 1+\sqrt{2} \quad \text{och} \quad f(0,-\sqrt{2},1) = 1-\sqrt{2}.$$

Det första värdet är det största värdet till f och det andra det minsta värdet.

Lösning till problem 6: Integrationsområdet är det inre av konen i figuren. Vi kan beräkna integralen med itererad integration.

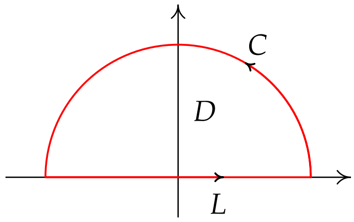


$$\begin{aligned} I &= \iiint_D \big(1+\sqrt{x^2+y^2}\big)\,dxdydz \\ &= \iint_{x^2+y^2\le 1} \big(1+\sqrt{x^2+y^2}\big)\,dxdy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 dz \\ &= \iint_{x^2+y^2\le 1} \big(1+\sqrt{x^2+y^2}\big)\big(1-\sqrt{x^2+y^2}\big)\,dxdy \\ &= \iint_{x^2+y^2\le 1} (1-x^2-y^2)\,dxdy \quad \text{(polära koordinater)} \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1-r^2)r\,dr = 2\pi\left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Vi kan också beräkna integralen på följande sätt:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dz \iint_{x^2+y^2\le z^2} \big(1+\sqrt{x^2+y^2}\big)\,dxdy \quad \text{(polära koordinater i } x,y\text{)} \\ &= \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z (1+r)r\,dr = 2\pi \int_0^1 \left[\frac{r^2}{2}+\frac{r^3}{3}\right]_0^z dz \\ &= 2\pi \int_0^1 \Big(\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}\Big)\,dz = 2\pi\left[\frac{1}{6}+\frac{1}{12}\right] = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Lösning till problem 7: Vi sätter $P(x,y) = 2xe^y$ och $Q(x,y) = x^2e^y + xy^2$. Nu blir $Q_x - P_y = 2xe^y + y^2 - 2xe^y = y^2$. Vi gör en sluten kurva $C + L$ genom att addera linjestycket L. Det inre av $C + L$ är en halvcirkel D. Vi använder nu Greens formel för att beräkna



$$
\begin{aligned}
\int_{C+L} P\,dx + Q\,dy &= \int_C P\,dx + Q\,dy + \int_L P\,dx + Q\,dy \\
&= \iint_D (Q_x - P_y)\,dxdy = \iint_D y^2\,dxdy \quad \text{(polära koordinater)} \\
&= \int_0^\pi d\theta \int_0^1 r^2 \sin^2\theta\, r dr d\theta = \int_0^\pi \sin^2\theta \left[r^4/4\right]_0^1 d\theta = \frac{1}{4}\int_0^\pi \sin^2\theta\,d\theta \\
&= \frac{1}{4}\int_0^\pi \frac{1-\cos 2\theta}{2}\,d\theta = \frac{1}{8}\left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{8}.
\end{aligned}
$$

Vi beräknar också $\int_L$ genom att parametrisera L som $x = t$, $y = 0$ där $-1 \le t \le 1$. Detta ger

$$\int_L = \int_{-1}^1 2te^0\,dt = \left[t^2\right]_{-1}^1 = 0.$$

Således blir $\int_C = \iint_D - \int_L = \frac{\pi}{8}$.

Lösning till problem 8: Vi sätter $f(x,a) = x^3 - 3ax + 2$. För $a = 0$ har ekvationen $f(x,a) = 0$ roten $x = -\sqrt[3]{2}$. Vidare har f kontinuerliga derivator med avseende på både x och a. Vi ser också att

$$f_x(x,a) = 3x^2 - 3a \quad \text{och det följer att} \quad f_x(x,0) = 3x^2 \neq 0 \quad \text{för} \quad x = -\sqrt[3]{2}.$$

Implicita funktionssatsen ger att vi ur ekvationen $f(x,a) = 0$ kan lösa ut $x = x(a)$ som en entydig och deriverbar funktion i omgivning av $(x,a) = (-\sqrt[3]{2}, 0)$ och sådan att $x(0) = -\sqrt[3]{2}$. Genom implicit derivering får vi

$$
\begin{aligned}
3(x(a))^2 x'(a) - 3x(a) - 3ax'(a) &= 0 \quad \text{eller för } a = 0 \\
3(x(0))^2 x'(0) - 3x(0) &= 0
\end{aligned}
$$

vilket ger att

$$x'(0) = \frac{1}{x(0)} = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$