UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Thomas Kragh

Prov i matematik

FLERVARIABELANALYS/
FLERVARIABELANALYS M
Spår ODE: 1MA016
Spår TOP: 1MA183
2015–01–11

Skrivtid: 14.00 – 19.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon. Lösningarna skall vara försedda med motiveringar. Varje korrekt löst uppgift ger högst 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 respektive 32 poäng.

1. Bestäm kurvintegral av funktionen $f(x, y) = x + y$ över kurvan

$$C : \vec{r}(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, \pi].$$

2. Avgör om funktionen

$$f(x, y) = x^7 + y^7$$

har ett största och minsta värde på området $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ och bestäm i så fall dessa.

3. Beräkna volymen av den begränsade kropp som avgränsas av ytorna med ekvationerna

$$x^2 + y^2 = z \qquad \text{och} \qquad 2x + 2y + 2 = z.$$

4. a) Transformera differentialekvationen

$$2x\frac{\partial f}{\partial x} - 3y\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad x > 0, y > 0$$

genom att införa variablerna $u = xy$ och $v = x^3y^2$ och finn alla lösningar av klass C^1.

b) Vilket område i (u, v) koordinater motsvara området $x > 0, y > 0$ i (x, y) koordinater? Motivera dit svar.

Var god vänd!

5. Beräkna kurvintegralen

$$\int_\gamma (x^4 + 3y^2x^2)dx + (y^3 + 2yx^3 + e^{\pi\sqrt{y^2+1}})dy$$

där $\gamma(t) = \big(\cos(t), 1 - e^{\sin(t)}\big)$ för $t \in [\pi, 2\pi]$.

6. Beräkna flödesintegralen

$$\iint_S \vec{F} \bullet d\vec{S},$$

för vektorfältet $\vec{F} = (e^{y^2}, e^{x^2}, e^{z^2})$, och ytan S givet av $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$ med orienteringen given av den normal som pekar bort från origo.

7. Funktionen

$$\vec{q}(u, v) = (u^2, u^2, u^2 + v), \qquad 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$$

är en parametrisering av en yta S i rymden $\mathbb{R}^3$. Finn arean av S.

8. **Fråga om du inte är säker på vilken kurs du är anmäld!**

(i) (spår ODE-1MA016) Finn alla lösningskurvor till differentialekvationen

$$2xydx + (x^2 + 1)dy = 0.$$

(ii) (spår TOP-1MA183) Låt $\delta > 0$ vara en positiv reell konstant. Visa att funktionsföljden

$$f_n(x) = \frac{n}{nx+1}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

konvergerar likformigt på intervalet $[\delta, \infty)$.

LYCKA TILL!