UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Thomas Kragh

Prov i matematik

E3, ES1, F1, KandMa

FLERVARIABELANALYS/
FLERVARIABELANALYS M
Spår ODE: 1MA016
Spår TOP: 1MA183
2016–06–02

Skrivtid: 8.00 – 13.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon. Lösningarna skall vara försedda med motiveringar. Varje korrekt löst uppgift ger högst 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 respektive 32 poäng.

1. (**Obs:** denna uppgift ska **inte** lösas om man har klarat duggan!)
Bestäm alla punkter på ytan

$$z = x^2 + y^2 - 2x^4$$

i vilka tangentplanet är parallellt med planet

$$2y + z = 0.$$

Bestäm även ekvationerna för dessa tangentplan.

2. Visa att sambandet $y^2 + \sin y + x^3 = 1 + \sin(1)$ definierar y som funktion av x i en omgivning av punkten $(0, 1)$. Beräkna också $y'(x)$ i denna punkt.

3. Bestäm största och minsta värde av

$$f(x, y) = 2x^4 + y^2 - 2xy$$

på mängden

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}.$$

Bestäm också alla lokala maxima och minima för funktionen definierad på hela $\mathbb{R}^2$.

4. Bestäm volymen av kroppen

$$K : x^2 + y^2 + |z| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

5. Bestäm flödet av vektorfältet

$$\vec{F}(x, y, z) = (y \cos(xy) + x, -x \cos(xy) + y, \cos z + z)$$

genom cylinder delen

$$S : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ -1 \leq z \leq 1 \end{cases}$$

orienterad så att normalvektorn pekar bort från z-axeln.

6. Bestäm kurvintegralen (arbetet)

$$\int_C \vec{F} \bullet d\vec{r}$$

där C är skärningskurvan mellan ytorna $x + z = 0$ och $3x^2 + y^2 + z^2 = 1$ orienterad så att enhetsvektorn (som ger riktningen) i punkten $(0, 1, 0)$ är $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$, och där

$$\vec{F}(x, y, z) = (e^{2016x}, e^{\sin y} + x + z^2, e^{\sin(\cos z)} + y).$$

7. Bestäm alla C^1 funktioner $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ så att

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2\frac{\partial f}{\partial y}.$$

(Ledning: Hitta till exempel nya koordinater där ekvationen är enklare att lösa, eller kolla på vad riktningsderivator säger om detta problem.)

8. (**Obs:** i denna uppgift löses enbart **ett** av de två nedanstående problemen (i) och (ii).)

(i) (spår ODE-1MA016) Bestäm alla lösningar till systemet av differentialekvationer:

$$\begin{cases} x' = x + 2016y \\ y' = y \end{cases}$$

(ii) (spår TOP-1MA183) Låt

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{n}\right)^n$$

för alla $x \in \mathbb{R}$.

(a) Visa att f är väldefinierad och kontinuerlig.

(b) Är f deriverbar?

LYCKA TILL!