UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Thomas Kragh

Prov i matematik

KandMa

FLERVARIABELANALYS M
1MA183
2017–01–04

Skrivtid: 8.00 – 13.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon. Lösningarna skall vara försedda med motiveringar. Varje korrekt löst uppgift ger högst 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 respektive 32 poäng.

1. Bestäm alla punkter på kurvan

$$e^{3y} + e^y \cos x = 0$$

i vilka tangentlinjen är parallell med x-axeln.

2. Visa att sambandet $y^5 + y^3 + y = 8y \sin x - 1$ definierar y som funktion av x i en omgivning av $(x, y) = (\frac{\pi}{6}, 1)$. Vad är derivatan av denna funktion i punkten $x = \frac{\pi}{6}$?

3. Avgör om funktionen

$$f(x, y) = e^x + e^y - \tfrac{1}{2} e^{2x+2y-3}$$

har ett största och minsta värde på mängden

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -10 \leq x \leq 10, -10 \leq y \leq 10\}.$$

och bestäm i så fall dessa värden.

4. Låt $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uppfylla:

1) $h(x, y) = g(x^2 + y^2)$ där $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är en C^2-funktion.
2) $x\dfrac{\partial h}{\partial x} + y\dfrac{\partial h}{\partial y} = 2x^2 + 2y^2$.

Bestäm alla möjliga sådana h.

5. Beräkna, om den konvergerar, den generaliserade integralen

$$\iint_{\mathcal{D}} \frac{1}{xy^2} dA$$

där $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1, x \leq y \leq 2x\}$.

Var god vänd!

6. Bestäm flödet av vektorfältet

$$\vec{F}(x,y,z) = (\sin x, y\sin z - y\cos x, \cos z)$$

genom ytan

$$S : \begin{cases} z = 1 - x^2 - y^2 \\ z \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

orienterad så att normalvektorn pekar bort från origo.

7. Låt

$$\vec{F} = (e^{\cos x} - y^3, \cos(e^y) + x^3, \cos(\sin z))$$

och låt $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vara en godtycklig C^1-funktion.
Visa att kurvintegralen

$$\int_C \vec{F} \bullet d\vec{r}$$

där C är kurvan given av $x^2 + y^2 = 1$ och $z = f(x,y)$, positivt orienterad sett från en punkt långt uppe på z-axeln, inte beror på funktionen f, samt beräkna dess värde.

8. Låt

$$f_n(x) = \frac{nx}{(nx)^2 + 1}, \qquad x \in [0,1].$$

(a) Visa att gränsfunktionen $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ existerar och är kontinuerlig.

(b) Visa att gränsvärdet $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$ existerar och är lika med $\int_0^1 f(x)dx$ där f är gränsfunktionen från (a).

(c) Avgör om $f_n \to f$ likformigt på $[0,1]$.

LYCKA TILL!