UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Maksim Maydanskiy

Final
1MA016/1MA183 Several Variable Calculus
2017-06-01

Exam time: 8:00 – 13:00. Tools allowed: only materials for writing. Please provide full explanations and calculations in order to get full credit. The final consists of 8 problems worth 5 points each, for a total of 40 points. For grades 3,4, and 5, one should obtain 18, 25, and 32 points, respectively. You may write your solutions in English or Swedish.

Swedish translation of the problems follows. In case of ambiguities or discrepancies, the English version takes precedence.

The first three problems correspond to the material on the midterm.

1. (5 points)

   (a) Show that the equation $x = y^3 - y$ defines y as a function of x near $(0, 1)$ and compute the derivative of that function at $(0, 1)$.

   (b) Is y globally a function of x? That is, does there exist a function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that (x, y) satisfy $x = y^3 - y$ if and only if $y = f(x)$?

2. (5 points)

   (a) Use the substitution $u(x, t) = x - ct$, $v(x, t) = x + ct$ to transform the wave equation $\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2}$ into $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = 0$.

   (b) Find all smooth solutions of $\frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial u \partial v} = 0$, and use that to find all smooth solutions of $\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2}$.

3. (5 points) Consider the function $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + 2y^2 + 3z^2}$ on the surface S given by $x + y + z = 1$. Does f it attain absolute maximum value on S? If yes, find it; if not explain why not. Does f it attain absolute minimum value on S? If yes, find it; if not explain why not.

4. (5 points) Find area of the surface obtained by rotating a curve

$$x = z^3, \text{ where } z \in [0, 1]$$

   around the z axis. (Hint: The surface can be parameterised by $x(\theta, z) = z^3 \cos\theta, y(\theta, z) = z^3 \sin\theta, z(\theta, z) = z$ with $\theta \in [0, 2\pi]$.)

5. (5 points)

   (a) Find a scalar potential of $\vec{F}(x,y,z) = (y^2 \cos x + 2xz, 2y \sin x + 3y^2, x^2)$.

   (b) Find the line integral of tangential component of $\vec{G}(x,y,z) = (y^2 \cos x + 2xz + y, 2y \sin x + 3y^2, x^2)$ along the straight line segment from $(0,0,0)$ to $(\pi, \pi, 0)$.

6. (5 points) Find the flux of $\vec{F}(x,y,z) = (x, y, z+1)$ out of the part of the surface $z = 4 - x^2 - y^2$ with $z \geq 0$, oriented with the normal vector $(0,0,1)$ at $(0,0,4)$.

7. (5 points) Let C be the curve of intersection between $z = x^2 + y^2$ and $z = 6x$ oriented counterclockwise when seen from high above the origin, say from $(0,0,100)$. Find the line integral of the tangential component of $\vec{F}(x,y,z) = (xy, yz, zx)$ around C.

8. (5 points)

   - (ODE)

     (a) Find general solution of the system

     $$\begin{cases} \frac{dx}{dt} & = 2x + y \\ \frac{dy}{dt} & = -x + 2y \end{cases}$$

     (b) Solve the Initial Value Problem

     $$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y \\ \frac{dy}{dt} = -x + 2y \\ x(0) = 2 \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

   - (TOP)

     (a) (3 points) Show that for $x \geq 0$ the function $f(x) = \sum_1^\infty \frac{1}{(2n+x)^3}$ exists and is continuous.

     (b) (2 points) Compute $\int_0^2 f(t)dt$.

     (c) (Challenge, 0 points) Compute $\int_0^1 f(t)dt$.

GOOD LUCK!

UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Maksim Maydanskiy

Slutprov
1MA016/1MA183 Flervariabelanalys
2017-06-01

Skrivtid: 8.00 - 13.00. Tillåtna hjälpmedel: endast skrivdon. För full poäng bör fullständiga förklaringar och uträkningar presenteras. Tentamen består av 8 frågor om 5 poäng vardera, alltså totalt 40 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25, 32 respektive poäng. Svaren får anges antingen på svenska eller på engelska.

I händelse av tvetydigheter eller avvikelser har den engelska versionen företräde.

De tre första problemen motsvarar materialet i duggan.

1. (5 poäng)

   (a) Visa att ekvationen $x = y^3 - y$ definierar y som en funktion av x nära $(0, 1)$ och beräkna derivatan av denna funktion i $(0, 1)$.

   (b) Är y en funktion av x globalt? Med andra ord, existerar det en funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sådan att (x, y) uppfyller $x = y^3 - y$ om och endast om $y = f(x)$?

2. (5 poäng)

   (a) Använd substitutionen $u(x, t) = x - ct$, $v(x, t) = x + ct$ för att transformera vågekvationen $\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2}$ till $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = 0$.

   (b) Finn alla glatta (“smooth”) lösningar till $\frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial u \partial v} = 0$, och använd dessa för att finna alla glatta lösningar till $\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2}$.

3. (5 poäng) Avgör om funktionen $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + 2y^2 + 3z^2}$ har ett största och minsta värde på ytan $x + y + z = 1$ och bestäm i så fall dessa.

4. (5 poäng) Beräkna arean hos den yta som fås genom att rotera kurvan

$$x = z^3 \text{ där } z \in [0, 1]$$

   runt z-axeln. (Ledtråd: Ytan kan parametriseras genom $x(\theta, z) = z^3 \cos\theta, y(\theta, z) = z^3 \sin\theta, z(\theta, z) = z$ där $\theta \in [0, 2\pi]$.)

5. (5 poäng)

   (a) Beräkna en skalärpotential till $\vec{F}(x, y, z) = (y^2 \cos x + 2xz, 2y \sin x + 3y^2, x^2)$.

   (b) Beräkna kurvintegralen för tangentkomponenten av $\vec{G}(x, y, z) = (y^2 \cos x + 2xz + y, 2y \sin x + 3y^2, x^2)$ längs med det raka linjesegment som löper från $(0, 0, 0)$ till $(\pi, \pi, 0)$.

6. (5 poäng) Beräkna flödet hos $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z + 1)$ ut ur den del av ytan $z = 4 - x^2 - y^2$ där $z \geq 0$, orienterad med normalvektor $(0, 0, 1)$ i $(0, 0, 4)$.

7. (5 poäng) Låt kurvan C vara intersektionen mellan $z = x^2 + y^2$ och $z = 6x$ orienterad moturs sedd från högt ovan origo, låt säga från $(0, 0, 100)$. Beräkna kurvintegralen för tangentkomponenten av $\vec{F}(x, y, z) = (xy, yz, zx)$ runt C.

8. (5 poäng)

   - (ODE)

     (a) Finn den allmänna lösningen till systemet

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} & = 2x + y \\ \frac{dy}{dt} & = -x + 2y \end{cases}$$

     (b) Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y \\ \frac{dy}{dt} = -x + 2y \\ x(0) = 2 \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

   - (TOP)

     (a) (3 poäng) Visa att för $x \geq 0$ funktionen $f(x) = \sum_1^\infty \frac{1}{(2n+x)^3}$ existerar och är kontinuerlig.

     (b) (2 poäng) Beräkna $\int_0^2 f(t)dt$.

     (c) (Utmaning, 0 poäng) Beräkna $\int_0^1 f(t)dt$.

LYCKA TILL!